الجمهورية العربية السورية

وزارة التعليم العالي

الجامعة السورية الخاصة

الإجازة في إدارة الأعمال

مقرر: رياضيات مالية

العام الدراسي ٢٠١٧– ٢٠١٨   الفصل الثاني

رياضيات مالية

Financial Mathematics

الأستاذ الدكتور طلال عبود

Professor Dr. Talal ABOUD

جدول المحتويات

أولاً – تذكير أساسيات رياضيات

(من مقرر رياضيات الأعمال)

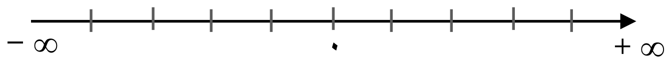
١) مجموعات الأعداد

<u>الأعداد الطبيعية:</u> ١، ٢، ٣، ... ∞   القيم الموجبة.

<u>الأعداد الصحيحة:</u> الأعداد الطبيعية السالبة والموجبة –∞، ...، –٢، –١، ٠، ١، ٢، ٣... ∞ ،

<u>الأعداد الكسرية:</u> $\frac{a}{b}$ حيث a، b أعداد صحيحة.

<u>الأعداد الحقيقية:</u> جميع الأعداد بين –∞ و +∞، بين كل عددين هناك عدد ثالث. تشمل هذه الفئة من الأعداد جميع المجموعات السابقة، وتمثل على شكل مستقيم موجه (محور) من –∞ إلى +∞.



٢) التوابع من الدرجة الأولى

هو كثير حدود من الشكل $F(x) = ax + b$ ، حيث a, b أعداد ثابتة حقيقية و a غير معدوم.

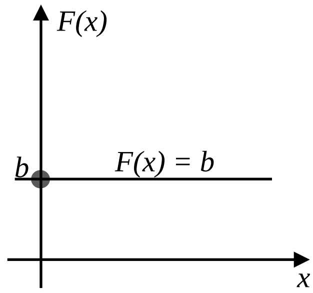
يُدعى الثابت a بميل التابع ويُمثل ظل الزاوية التي يصنعها الخط البياني مع محور السينات، في حين يمثل الثابت b قيمة $F(x)$ عندما $x=0$ أي نقطة تقاطع الخط البياني للتابع مع محور العينات.

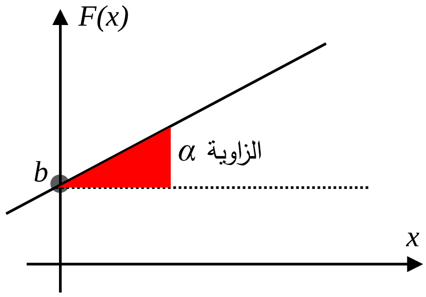
إشارة كثير الحدود $F(x)$ تعني تحديد قيمة المتحول x التي تجعل $F(x)$ سالب أو موجب:

$$F(x) = 0 \qquad ax + b = 0$$

يمثل معادلة من الدرجة الأولى لها حل/جذر وحيد هو $x = -\frac{b}{a}$، تكون إشارة $F(x)$ مخالفة لإشارة a قبل الجذر وموافقة لإشارة a بعد الجذر.

ويكون الخط البياني للتابع من الدرجة الأولى على شكل خط مستقيم:





٣- كثيرات الحدود من الدرجة الثانية

٣-١ دراسة إشارة كثير الحدود من الدرجة الثانية

له الشكل $F(x) = ax^2 + bx + c$، حيث a,b,c أعداد حقيقية و a غير معدوم، يمثل معادلة من الدرجة الثانية. عندما يكون $a = 0$ فإن كثير الحدود يصبح من الدرجة الأولى.

دراسة إشارة $F(x)$ تعني تحديد قيم x التي تجعل $F(x)$ سالب أو موجب، ولذلك نقوم بما يلي:

١) اعتبار كثير الحديد كمعادلة من الدرجة الثانية أي $F(x) = 0$

٢) إيجاد جذور المعادلة إن وجدت

٣) دراسة إشارة المقدار $F(x)$ بين الجذرين، وخارج الجذرين

٤) وضع جدول مساعد لتغيرات قيم x وقيم كثير الحدود $F(x)$ وجذور المعادلة.

نعدم معادلة كثير الحدود: $ax^2 + bx + c = 0 \qquad F(x) = 0$

نحسب المميز $\Delta = b^2 - 4ac$، هناك ثلاث حالات ممكنة:

الحالة الأولى: $\Delta > 0$ للمعادلة جذران حقيقيان.

الحالة الثانية: $\Delta = 0$ للمعادلة جذر مضاعف.

الحالة الثالثة: $\Delta < 0$ ليس للمعادلة جذور.

الحالة الأولى $\Delta > 0$، نحسب جذرا المعادلة بالشكل الآتي:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

نضع جدول فتكون إشارة $F(x)$ بين الجذرين مخالف لإشارة a وخارج الجذرين موافق لإشارة a:

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
إشارة $F(x)$	**موافق لإشارة** a	0	**مخالف لإشارة** a	0	**موافق لإشارة** a

الحالة الثانية $\Delta = 0$: نحسب الجذر المضاعف $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ وتكون إشارة $F(x)$ قبل وبعد الجذر موافقة لإشارة a.

الحالة الثالثة $\Delta < 0$: لا يوجد جذور حقيقية لـ $F(x)$ ، وتكون إشارته موافقة لإشارة a.

٣-٢ وضع كثير حدود من الدرجة الثانية على شكل جداء

إذا كان لكثير الحدود من الدرجة الثانية $F(x) = ax^2 + bx + c$ جذران x_1 و x_2 فإننا نستطيع كتابته على شكل جداء: $F(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

وإذا كان له جذر مضاعف x_0 نكتبه على الشكل: $F(x) = a(x - x_0)^2$

هناك طرق أخرى لكتابة كثير الحدود على شكل جداء، منها:

أ) إخراج عامل مشترك، أمثلة:

$$3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$
$$x^2 + 4x = x(x + 4)$$
$$\frac{1}{3}x^2 - x = \frac{1}{3}x(x - 3)$$

ب) المطابقات الشهيرة:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

ج) التحليل المباشر، إذا كان لدينا كثير حدود من الشكل $x^2 + bx + c$ نبحث عن عددين مجموعهما b وجداؤهما c ، أمثلة:

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$$
$$x^2 - x - 30 = (x - 6)(x + 5)$$

٣-٣ خطوات دراسة إشارة كثير الحدود بشكل عام

نتبع الخطوات الآتية:

(١) وضع كثير الحدود على شكل جداء (أو قسمة) كثيرات حدود جزئية من الدرجة الأولى أو من الدرجة الثانية والتي سبق أن تم دراستها،

(٢) دراسة إشارة كل واحد من كثيرات الحدود الجزئية على حدة،

(٣) تنظيم جدول ووضع إشارة كل منها في سطر مستقل،

(٤) تتحدد إشارة كثير الحدود بإجراء جداء (أو قسمة) إشارات كثيرات الحدود الجزئية.

٤ – المتراجحات

٤-١ تعريف

المتراجحة هي كل مقارنة بين a, b حقيقيين $(a,b \in \Re)$ وتكتب بالشكل:

$a < b$ أو $a > b$

وقد تدخل المساواة أحياناً مع الأكبر أوالأصغر، وبالتالي يمكن كتابة المتراجحة بالشكل:

$a \leq b$ أو $a \geq b$

٤-٢ خواص المتراجحات

ليكن لدينا المتراجحة $a > b$ فإن:

١) إضافة عدد حقيقي $c \in \Re$ إلى طرفي المتراجحة لا يغير اتجاه المتراجحة:

$a > b$ فإن $a + c > b + c$

٢) الضرب بعدد موجب تماماً $c \in \Re^{+*}$ لا يغير اتجاه المتراجحة: $a > b$ فإن $a.c > b.c$

٣) الضرب بعدد سالب تماماً $c \in \Re^{-*}$ يغير اتجاه المتراجحة: $a > b$ فإن $a.c < b.c$

٤) إن قلب العددين a, b حيث a, b لهما نفس الإشارة يغير اتجاه المتراجحة: $a > b$ فإن $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

٥) جمع المتراجحات، بفرض $a,b,c,d \in \Re$: $\begin{matrix} a > b \\ c > d \end{matrix} \Leftarrow a+c > b+d$

٦) ضرب المتراجحات، بفرض $a,b,c,d \in \Re^{+*}$: $\begin{matrix} a > b \\ c > d \end{matrix} \Leftarrow a.c > b.d$

٤-٣ حل المتراجحات

إن حل متراجحة يعني إيجاد قيم x التي تحقق المتراجحة.

بشكل عام قد نضطر لدراسة إشارة كثيرات الحدود من الدرجة الأولى أو من الدرجة الثانية.

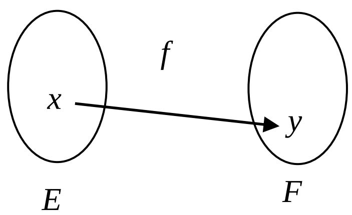
٥- المتتاليات العددية

٥-١ التطبيق

هو علاقة f تربط بين عنصر x من مجموعة E وعنصر y من مجموعة F.

نسمي E المنطلق ونسمي F المستقر. نرمز للتطبيق بالشكل:

$$\begin{aligned} f &: E \to F \\ x &\to y = f(x) \end{aligned}$$



ليس بالضرورة أن كل عنصر y من المستقر صورة لعنصر x من المنطلق، ولكن يمكن أن يكون عنصر y من المستقر صورة لأكثر من عنصر x من المنطلق.

٥-٢ المتتالية

هي تطبيق منطلقه مجموعة الأعداد الطبيعية N ومستقره الحقيقية $\Re$ أو أية مجموعة جزئية منها. نرمز للمتتالية بالشكل:

$$\begin{aligned} u &: N \to \Re \\ n &\to u(n) = u_n \end{aligned}$$

وندعو u_n الحد العام للمتتالية من المرتبة n.

يمكن التعبير عن المتتالية بعلاقة تدريجية حيث نحسب الحد العام u_n بدلالة الحد u_{n-1}.

٥-٣ المتتالية الحسابية

نقول عن متتالية u_n أنها حسابية إذا أمكن استنتاج أي حد من حدودها من الحد الذي يسبقه بإضافة ثابت. ونكتبها بالشكل $u_{n+1} = u_n + r$ حيث r ثابت المتتالية الحسابية ونسميه أساس المتتالية u_n.

يكتب الحد العام للمتتالية الحسابية بالشكل $u_n = u_0 + nr$ حيث u_0 الحد الأول و r أساس المتتالية.

٥-٤ المتتالية الهندسية

نقول عن متتالية u_n أنها هندسية إذا أمكن استنتاج أي حد من حدودها من الحد الذي يسبقه بالضرب بثابت. نكتبها بالشكل $u_{n+1} = u_n.q$ حيث q ثابت المتتالية الهندسية ونسميه أساس المتتالية u_n.

يكتب الحد العام للمتتالية الهندسية بالشكل $u_n = u_0(q)^n$ حيث u_0 الحد الأول و q أساس المتتالية.

٥-٥ المتتالية المتزايدة والمتتالية المتناقصة

نقول عن متتالية u_n أنها متزايدة إذا تحقق الشرط التالي: $\forall n \in N, \quad u_{n+1} > u_n$

نقول عن متتالية u_n أنها متناقصة إذا تحقق الشرط التالي: $\forall n \in N, \quad u_{n+1} < u_n$

١. كل متتالية حسابية أساسها موجب تكون متزايدة.

٢. كل متتالية حسابية أساسها سالب تكون متناقصة.

٣. كل متتالية هندسية أساسها موجب وأكبر من الواحد تكون متزايدة.

٤. كل متتالية هندسية أساسها موجب وأصغر من الواحد تكون متناقصة.

٥. كل متتالية هندسية أساسها سالب تكون غير متزايدة وغير متناقصة.

٥-٦ نهاية متتالية

هو دراسة سلوك المتتالية عندما تسعى n إلى اللانهاية.

نقول أن القيمة l تمثل نهاية المتتالية u_n عندما تسعى n إلى اللانهاية.

نقول عن متتالية أنها تسعى نحو l عندما تسعى n إلى اللانهاية إذا أمكن إيجاد عدد طبيعي $p \in N$ وذلك من أجل كل عدد حقيقي α بحيث يتحقق ما يلي:

$$\forall \alpha \in \Re, \quad \exists p \in N, \quad \forall n > p, \quad |u_n - l| < \alpha$$

٥–٧ نهاية بعض المتتاليات الشهيرة

$$u_n = \frac{1}{n}, \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

$$u_n = \frac{1}{n^2}, \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

$$u_n = \frac{1}{n^3}, \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} na^n = 0 \;;\; 0 < a < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

$$u_n = n, \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \infty$$

$$u_n = n^2, \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \infty$$

$$u_n = n^3, \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \infty$$

$$u_n = \sqrt{n}, \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} (n)^{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \;;\; 0 < a < 1$$

٥–٨ العمليات على النهايات

بفرض أن u_n, v_n متتاليتين ونهاية كل منهما كما يلي: $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ و $\lim_{n\to\infty} v_n = l'$

وبالتالي يمكن إجراء عمليات الجمع، الطرح، الضرب، والقسمة على النهايات كما يلي:

$$\lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = l + l'$$

$$\lim_{n\to\infty} (u_n - v_n) = l - l'$$

$$\lim_{n\to\infty} (u_n . v_n) = l . l'$$

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{u_n}{v_n}) = \frac{l}{l'} \quad (l' \neq 0)$$

٦– التوابع العددية

٦–١ تعريف

التابع هو كل تطبيق f منطلقه $\Re$ أو مجموعة جزئية منها (نرمز لها I) ومستقره $\Re$.

نرمز له بالشكل
$$\begin{aligned} f &: I \to \Re \\ x &\to y = f(x) \end{aligned}$$
حيث $y = f(x)$ تدعى قاعدة ربط التابع.

تمثل x عنصر من المنطلق، وتمثل y عنصر من المستقر.

ندعو المستقر الفعلي للتابع f مجموعة القيم الحقيقية التي يأخذها التابع f من أجل كل عنصر x من المنطلق ونرمز لها بالرمز Y.

مجموعة التعريف: تمثل مجموعة المنطلق I وهي مجموعة جزئية من $\Re$ والتي يأخذ فيها المتحول x قيمه، نرمز لمجموعة التعريف بالرمز D_f.

٦-٢ المستقيمات المقاربة

ليكن λ الخط البياني للتابع العددي $y = f(x)$ والمرسوم في جملة متعامدة نظامية oxy. يوجد ثلاثة أنواع من المقاربات للخط البياني للتابع f.

١. مستقيم مقارب يوازي ox إذا تحقق الشرط الآتي:

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a$ حيث $a \in \Re$ فإن المستقيم $y = a$ يدعى مستقيم مقارب يوازي ox.

٢. مستقيم مقارب يوازي oy إذا تحقق الشرط الآتي:

$\lim_{x \to b} f(x) = \pm\infty$ حيث $b \in \Re$ فإن المستقيم $x = b$ يدعى مستقيم مقارب يوازي oy.

٣. مستقيم مقارب مائل إذا تحقق الشرط الآتي:

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ فإنه توجد إمكانية وجود مستقيم مقارب مائل D.

بفرض $Y = ax + b$ معادلة هذا المستقيم، نقول إن D مستقيم مقارب مائل للخط البياني للتابع $f(x)$ إذا كان $f(x) - Y = \varepsilon(x)$ حيث $\varepsilon(x)$ تابع يسعى إلى الصفر عندما تسعى x إلى اللانهاية.

للبحث عن المستقيمات المقاربة بشكل عام، نحدد مجموعة التعريف ونكتبها على شكل مجالات ثم نبحث عن النهايات عند أطراف المجالات.

٦-٣ الحد الأعلى والحد الأدنى لتابع

الحد الأعلى لتابع (إن وجد) هو العنصر الأكبر الأصغري على مجموعة قيمه (مستقره الفعلي).

M حد أعلى للتابع $f(x)$ $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in D_f\,,\ f(x) \le M$

الحد الأدنى لتابع (إن وجد) هو العنصر الأصغر الأعظمي على مجموعة قيمه (مستقره الفعلي).

m حد أدنى للتابع $f(x)$ $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in D_f\ ,\ f(x) \geq m$

نقول عن تابع أنه محدود من الأعلى إذا كان له حد أعلى.

نقول عن تابع أنه محدود من الأدنى إذا كان له حد أدنى.

نقول عن تابع أنه محدود فقط إذا كان له حد أعلى وحد أدنى.

٦-٤ دراسة تحولات التوابع العددية

ليكن f تابع حقيقي
$$\begin{aligned} f : D_f &\to \Re \\ x &\to y = f(x) \end{aligned}$$

نقول عن f أنه مستمر عند النقطة x_0 إذا تحقق الشرطان الآتيان:

أ- $x_0 \in D_f$

ب- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

٦-٥ تعريف اشتقاق تابع

ليكن f تابع حقيقي
$$\begin{aligned} f : D_f &\to \Re \\ x &\to y = f(x) \end{aligned}$$

نقول عن f أنه قابل للاشتقاق عند النقطة x_0 إذا تحقق الشرطان الآتيان:

أ- $x_0 \in D_f$

ب- موجودة $(\neq \infty)$ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

نسمي النهاية السابقة قيمة التابع المشتق عند النقطة x_0. ونرمز لها بالرمز $f'(x_0)$.

وبالتالي نستطيع أن نعرف ما نسميه التابع المشتق f' وذلك على النحو التالي:

$$\begin{aligned} f' : D_{f'} \subseteq D_f &\to \Re \\ x &\to f'(x) \end{aligned}$$

ملاحظة: كل تابع f قابل للاشتقاق عند النقطة x_0 أو على مجال فهو مستمر عند النقطة x_0 أو على هذا المجال، أما العكس غير صحيح.

<u>العمليات على المشتقات</u>

ليكن f, g تابعين حقيقيين وليكن f', g' مشتقي التابعين السابقين، فإنه يمكن إجراء عمليات الجمع، الطرح، الضرب، والقسمة على المشتقات كما يلي:

$$(f+g)' = f' + g'$$
$$(f-g)' = f' - g'$$
$$(f.g)' = f'g + g'f$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \qquad (g \neq 0)$$

<u>مشتقات التوابع الأساسية</u>

التابع الثابت $f(x) = K \in \Re \Rightarrow f'(x) = 0$

التابع الصحيح من الدرجة الأولى

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$
$$f(x) = ax \Rightarrow f'(x) = a$$
$$f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$$

التابع الصحيح من الدرجة الثانية

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$
$$f(x) = ax^2 \Rightarrow f'(x) = 2ax$$
$$f(x) = ax^2 + bx \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$$

التابع الصحيح من الدرجة n : $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

تابع الجذر التربيعي:

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$f(x) = \sqrt{ax} \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax}}$$
$$f(x) = \sqrt{ax+b} \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$
$$f(x) = \sqrt{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}}$$

٦-٦ تزايد وتناقص تابع، والنهايات

ليكن $f(x)$ تابع مستمر وقابل للاشتقاق على مجال ما من مجموعة تعريفه:

نقول عن $f(x)$ أنه متزايد (متزايد تماماً) على هذا المجال إذا كان $f'(x)$ موجباً (موجباً تماماً) على هذا المجال.

نقول عن $f(x)$ أنه متناقص (متناقص تماماً) على هذا المجال إذا كان $f'(x)$ سالباً (سالباً تماماً) على هذا المجال.

<u>القيم الموضعية (النهايات الحدية) لتابع</u>

ليكن $f(x)$ تابع مستمر وقابل للاشتقاق على مجال ما مجموعة تعريفه.

نقول أن للتابع $f(x)$ قيمة موضعية عند النقطة x_0 من هذه المجال إذا كان $f'(x_0)=0$.

نقول عن القيمة الموضعية أنها عظمى إذا غير $f'(x)$ إشارته من الموجبة إلى السالبة عند النقطة x_0 .

نقول عن القيمة الموضعية أنها صغرى إذا غير $f'(x)$ إشارته من السالبة إلى الموجبة عند النقطة x_0 .

٦–٧ دراسة تحولات تابع عددي ورسم خطه البياني

نتبع الخطوات الآتية:

١. نحدد مجموعة تعريفه ونكتبها على شكل مجالات.

٢. نوجد نهايات التابع عند أطراف المجالات ونحدد المستقيمات المقاربة الموازية للمحورين oy, ox .

٣. نوجد مشتق التابع ونحدد مجموعة تعريفه ثم ندرس إشارته لتحديد مجالات تزايد وتناقص التابع.

٤. ننظم جدول بالنتائج السابقة يدعى جدول تحولات التابع. نحدد من خلاله الحدين الأعلى والأدنى (إن وجدا) والقيم الموضعية العظمى والصغرى (إن وجدت).

٥. إيجاد بعض النقاط المساعدة مثل نقاط التقاطع مع المحورين oy, ox .

٦. رسم الخط البياني للتابع.

ثانياً – تطبيقات الرياضيات المالية

١– الفائدة البسيطة والفائدة المركبة

١–١ مفهوم الفائدة

أحد المشكلات الرئيسية للعاملين في المالية هي في كيفية تحديد القيم الحالية للتدفقات المالية المتوقعة في المستقبل؟ أو بالعكس في كيفية حساب القيمة المستقبلية المتوقعة لمجموعة من التدفقات المالية في نهاية فترة محددة أو بتاريخ محدد؟ وذلك لأن المبالغ الحالية لا تكافئ نفس المبالغ في المستقبل، لذلك نلجأ إلى مفهوم تحيين التدفقات بتاريخ محدد سواء في بداية أو في نهاية التدفقات أو في أي تاريخ، وهو ما ندعوه بالتراكم أي القيمة التراكمية للتدفقات في التاريخ المحدد (*Actualisation*)، تختلف هذه القيمة التراكمية حسب الفترات وقيم التدفقات وطبعاً معدل الفائدة المعتمد بشكل بسيط أو بشكل مركب.

فيما يلي نمط الأسئلة التي يمكن أن نجيب عليها بدراسة معدلات الفائدة وعلاقتها بالقيم التراكمية الحالية أو المستقبلية:

مثال (١) ما هي القيمة المستقبلية لمبلغ ١٠٠ ل.س في إقراضه أو استثماره لمدة ١٠ سنوات بمعدل فائدة ١٠% سنوياً؟ في حالتي فائدة بسيطة أو فائدة مركبة؟

مثال (٢) ما هي القيمة الحالية لأقساط (تدفقات) سنوية متساوية حيث قيمة القسط السنوي ١٠٠ ل.س ولمدة ١٥ سنة بمعدل فائدة مركبة ١٠% سنوياً ؟

مثال (٣) ما هو القسط السنوي المتوجب دفعه سنوياً لمبلغ قرض يساوي ١٠٠٠ ل.س لمدة ٥ سنوات بمعدل فائدة مركبة يساوي ١٠%؟

١–٢ الاستثمار لدورة (فترة) واحدة

لنفترض بأننا نستثمر مبلغ ١٠٠ ل.س بمعدل فائدة ١٠% سنوياً. فما هي قيمة الاستثمار بعد سنة واحدة؟

المبلغ بعد سنة = المبلغ الأصلي + معدل الفائدة خلال السنة

= ١٠٠ + ١٠٠ * ١٠% = ١٠٠*(١+١٠%) = ١١٠ ل.س

= المبلغ (١ + معدل الفائدة)

بشكل عام إذا كان المبلغ المستثمر هو x ومعدل الفائدة السنوي هو t فإن المبلغ بعد سنة هو $x(1+r)$.

١–٣ الاستثمار لأكثر من دورة (فترة) واحدة

لنأخذ نفس المثال السابق، ما هي قيمة الاستثمار بعد سنتين؟

من الطبيعي أن نعتمد نفس المنطق السابق أي حساب قيمة الاستثمار في نهاية السنة الأولى ثم حسابه في نهاية السنة الثانية أي سنة فسنة، هنا يمكن أن نميز حالتين:

الحالة الأولى: أن يسحب المستثمر الفوائد في نهاية السنة الأولى ويستثمر المبلغ الأصلي فقط أي ١٠٠ ل.س لسنة ثانية، وندعوه حساب الفائدة في هذه الحالة بالفائدة البسيطة. وبالتالي يُصبح الحساب كالتالي:

في السنة الأولى: ١٠٠ + ١٠٠*١٠% = ١١٠ ل.س، نسحب مبلغ الفوائد أي ١٠ ل.س ونستثمر ١٠٠ ل.س في السنة الثانية.

في السنة الثانية: ١٠٠ + ١٠٠*١٠% = ١١٠ ل.س.

في نهاية السنتين، يُصبح مجموع المبلغ النهائي: المبلغ الأصلي ١٠٠ ل.س + فوائد السنتين ٢٠ ل.س = ١٢٠ ل.س.

بشكل عام، إذا كان المبلغ المستثمر هو x ومعدل الفائدة السنوي هو t

فإن المبلغ بعد n سنة هو: $x(1+ n.t)$

الحالة الثانية: أن يبقي فوائد السنة الأولى ويستثمرها مع المبلغ الأصلي أي يستثمر فعلياً ١١٠ ل.س في السنة الثانية، وندعو حساب الفائدة في هذه الفائدة بالفائدة المركبة، أي نحصل على "فوائد على الفوائد". وبالتالي يُصبح الحساب كالتالي:

في السنة الأولى: ١٠٠ + ١٠٠*١٠% = ١١٠ ل.س، نبقي الفوائد أي ١٠ ل.س ونستثمرها مع المبلغ الأصلي أي نستثمر فعلياً في السنة الثانية ١١٠ ل.س.

في السنة الثانية: ١١٠ + ١١٠*١٠% = ١٢١ ل.س.

في نهاية السنتين، يُصبح مجموع المبالغ = ١٢١ ل.س.

بشكل عام، إذا كان المبلغ المستثمر هو x ومعدل الفائدة السنوي هو t

فإن المبلغ بعد n سنة هو $x(1+ t)^n$

ما قيمة الاستثمار بعد ٣ سنوات مثلاً؟

قيمة الاستثمار بعد ٣ سنوات: $100(1+ 0.1)^3=$ ١٣٣,١ ل.س

١-٤ تمارين:

١) ما هي القيمة المستقبلية لاستثمار ١٠٠٠ ل.س بعد ٤ سنوات بمعدل فائدة ٨% سنوياً؟

الجواب: $1000(1+8\%)^4 =$ ١٣٦٠,٥ ل.س

٢) ما هي القيمة المستقبلية لنفس المثال السابق لكن بحساب الفائدة البسيطة؟

الجواب: $1000(1+4*8\%) =$ ١٣٢٠ ل.س

٢- حسم واستبدال السندات

السند: هو صك يثبت أن مالك السند قد قام بإقراض الجهة مُصدرة السند مبلغاً معيناً من المال، مقابل الحصول على دخل ثابت، حيث تتعهد الجهة التى أصدرت السند بأن يُدفع لحامل السند فائدة (تُدعى كوبون) محددة مسبقاً طوال مدة السند وأن يرد القيمة الاسمية للسند (الأصل) عند حلول أجلها أو حين تصبح مستحقة.

هناك فرق جوهري بين السند والسهم: يتمثل بأن السهم يمثل نصيب في ملكية الشركة، بينما يعتبر السند جزء من قرض للشركة، ولا يتحمل حامل السند أى مخاطر عند الاستثمار في السندات إلا في حالة تعثر المقرض في سداد أصل القرض أو الفوائد.

أنواع السندات:

- ✓ حسب الجهة المصدرة لها (حكومية، شركات، جهات اعتبارية)
- ✓ حسب مدة الاستحقاق (قصيرة الأجل، متوسطة الأجل، طويلة الأجل)
- ✓ حسب العائد (ذات عائد ثابت، ذات عائد متغير، صفرية الكوبون)
- ✓ حسب القابلية للاسترداد (قابلة للاسترداد قبل موعد الاستحقاق، غير قابلة للاسترداد)
- ✓ حسب القابلية للتحول إلى الأسهم (قابلة للتحول لأسهم أو غير قابلة للتحول للأسهم)
- ✓ حسب الضمان (مضمونة بأصول، غير مضمونة)

العناصر المطلوب دراستها قبل اتخاذ قرار شراء السندات:

١- تاريخ الاستحقاق

٢- أنواع الكوبونات

٣- العائد على السندات

٤- أسعار السندات

١- تاريخ الإستحقاق: ويقصد به تاريخ استرداد المستثمر لأصل المبلغ، وتتراوح تواريخ استحقاق السندات من سنة واحدة إلى ثلاثين سنة.

٢- أنواع الفائدة أو الكوبونات: يمكن أن تكون الفائدة على السندات "ثابتة" أو "متغيرة" أو "مستحقة الدفع عند تاريخ الاستحقاق" كما يلي:

أ) سندات ذات عائد ثابت: تصدر بمعدل فائدة ثابت حتى تاريخ الاستحقاق وبنسبة مئوية من القيمة الاسمية . ويتم دفع كوبون الفائدة سنوياً أودورياً حسب ما يتم الاتفاق عليه.

ب) السندات ذات الفائدة المتغيرة: هي سندات تصدر بفوائد متغيرة حيث يتم تغيير الفوائد أو الكوبونات على السندات بما يتماشى مع المتغيرات لمؤشر معين يتم الاتفاق عليه، فمثلاً تحدد الجهة المصدرة للسند سعر الفائدة السنوى بواحد فى المائة أعلى من سعر الفائدة على أذون الخزانة أو سعر الخصم أو معدل الليبور، وبالتالى ترتفع الفائدة على السند مع ارتفاع هذا المؤشر أو تنخفض فى حالة انخفاضه. وهذه السندات تحمي الجهة المصدرة من مخاطر حدوث انخفاض لأسعار الفائدة في السوق.

ج) سندات الكوبونات الصفرية "مستحقة الدفع عند تاريخ الاستحقاق": ليست لها فائدة تدفع دورياً، وبدلاً من ذلك فإنه يتم بيعها من البداية بقيمة تقل عن القيمة الاسمية ويتم استردادها بكامل قيمتها الاسمية عند حلول تاريخ استحقاقها وبالتالى يكون المستثمر قد حصل على سعر الشراء بالإضافة الى إجمالى الفائدة المستحقة والمتراكمة طوال فترة السندات.

د) سندات قابلة للتحويل: هى سندات يمكن تحويلها إلي أسهم عادية، من أسهم الشركة المصدرة للسند، بتاريخ وبسعر محددين مسبقاً .ويكون لصاحب السند حرية الإختيار في ممارسة حقه، في تحول السند إلى سهم، أو استرداد قيمة السند الأصلية، في تاريخ الإستحقاق.

٣- العائد على السندات: أداه تستخدم لقياس العائد على السندات مقارنة بالسندات الأخرى في السوق وبواسطة هذا المؤشر يمكن للمستثمر اتخاذ القرار الصائب بشأن أي من السندات التي يشتريها، يعتمد العائد على السندات على السعر الذي تدفعه والفائدة التي تتلقاها. هناك نوعان من عوائد السندات:

أ) العائد الجارى: يحسب بقسمة فائدة السند على سعر شرائه، فمثلاً إذا تم شراء السند بسعر ١٠٠ ل.س، وحصل على فائدة ١٠ ل.س، فإن العائد الجاري يساوي ١٠%.

ب) العائد حتى تاريخ الاستحقاق: يخبرك العائد حتى تاريخ الاستحقاق بإجمالي العائد الذي ستتلقاه لقاء احتفاظك بالسند حتى تاريخ استحقاقه. أي كافة الفوائد والكوبونات التي تتلقاها من وقت شرائك للسندات حتى تاريخ استحقاقها بالإضافة إلى أي مكسب آخر.

٤- أسعار السندات: يعتمد سعر السند على عدة متغيرات مثل أسعار الفائدة والعرض والطلب ونوعية الائتمان وتاريخ استحقاق السندات. وعادة ما تباع السندات المصدرة لأول مرة بالقيمة الاسمية لها أو ما يقاربها، أما السندات التي يتم التداول عليها فى البورصة فأسعارها تكون متغيرة طبقاً للتغير في أسعار الفائدة، وحينما يتجاوز سعر السند قيمته الاسمية يقال عنه أنه يباع بأزيد من القيمة الاسمية *Premium*

وإذا بيع السند بسعر أدنى من القيمة الاسمية يقال عنه أنه يباع بخصم *Discount* وإذا تعادل سعر السند مع قيمته الاسمية يقال أنه يباع بالقيمة الاسمية *Par* . أما مصطلح السعر الصافي *Clean Price* فيعبر عن سعر شراء السندات في السوق الثانوي (البورصة) مخصوم منه الفوائد المتراكمة عن الفترة التى احتفظ بها البائع بالسند، بمعنى أن يدفع المشترى للبائع ليس فقط السعر الصافي للسندات بل أيضاً فائدة الفترة التى احتفظ بها مالك السند فى حوزته .ويتم التعامل بمفهوم السعر الصافي للسندات في معظم الأسواق.

مزايا الاستثمار فى السندات:

أ- تخفيض المخاطر بالتنويع: يفضل أغلبية المستثمرين أن يكون لديهم محفظة استثمار متنوعة لتقليل نسبة المخاطرة وتتكون هذه المحفظة من سندات وأسهم ونقود في البنوك ذات نسب مئوية متفاوتة وذلك طبقاً لظروف المستثمر وحساسيته تجاه المخاطر.

ب- دخل دورى: إن السندات لها دخل يمكن توقعه وغالباً ما يكون محدد ومعروف مسبقاً، إذا كانت الشركة مصدرة السندات (أو الحكومة) قادرة على الوفاء بتسديدها فى المواعيد المحددة.

ت- أداة استثمار آمنة: حيث يتم قياس جودة السندات وفقاً للملاءة أو (القدرة الائتمانية) للشركات المصدرة لها. وتعرف الملاءة أو القدرة الائتمانية بقدرة الشركة مصدرة السندات على الوفاء بالتزاماتها المالية. كلما كانت المقدرة الائتمانية للمصدر أعلى كلما كان الاستثمار أكثر سلامة وعادة ما يقدم المستثمرون على الاستثمار في السندات للحفاظ على المبلغ الأصلي المدفوع أو على القيمة الاسمية.

ث- عائد مناسب: يمكن أن يختار البعض الاستثمار في سندات الشركات نظراً لما تقدمه من عائداً أكبر بالمقارنة مع السندات الحكومية. عادة ما يصاحب العائد الأكبر مخاطر أكثر لأنه من المفترض أن الجهات غير الحكومية ليست لها نفس الجدارة الائتمانية التي تكون لدى الجهات الحكومية.

هناك بعض المخاطر التي يجب على المستثمر أخذها بالاعتبار عندما يستثمر في السندات حيث يجب أن يتأكد أنه سيتقاضى عائداً مناسباً مقابل تلك المخاطر، وفى مقدمة تلك المخاطر عدم قدرة الشركة المصدرة للسند على دفع العوائد بانتظام، أو رد المبلغ الأصلى عند الاستحقاق. ولكى يمكن تحديد إجمالى مستوى المخاطر المتعلقة بإصدار ما من إصدارات السندات، على المستثمر متابعة ومعرفة درجة التصنيف الائتمانى للسند المطلوب شراؤه. ولهذا السبب تُزم هيئة الرقابة المالية كل من يصدر سنداً بضرورة الحصول على حد أدنى من التصنيف الائتمانى من إحدى وكالات التصنيف الائتمانى المعتمدة. هناك أيضاً بعض المخاطر الأخرى التى يجب على المستثمر أخذها فى اعتباره عند الاستثمار فى سوق السندات مثل مخاطر التضخم، سعر الفائدة، السيولة، الائتمان، إعادة الاستثمار.

من الأمثلة التقليدية للسندات:

- ✓ قروض لشراء أراضي وبناء منازل
- ✓ قروض شخصية لغايات معينة
- ✓ قروض شراء الآليات
- ✓ قروض تجارية

ومن الأمثلة الأكثر تعقيداً للسندات:

- ✓ التزامات السندات المضمونة والتزامات القروض المضمونة
- ✓ القروض المتعثرة
- ✓ ديون المشروعات الصغيرة
- ✓ أوراق تجارية مضمونة بأصول تجارية
- ✓ قروض شراء وتأجير السيارات أو قروض شراء وتملك المنازل

مثال (١) شراء سند مصرف التسليف الشعبي (شهادة استثمار) قيمته ١٠٠ ألف ل.س بمعدل فائدة سنوية ١٠% تُدفع سنوياً من قبل المصرف، ولمدة ٥ سنوات. فما هو القيمة الإجمالية لمشتري هذا السند؟

الحل:

طالما أن الفائدة تُدفع سنوياً فهي فائدة بسيطة وتساوي ١٠٠,٠٠٠ * ١٠% = ١٠,٠٠٠ ل.س

مجموع الفوائد على ٥ سنوات: ٥ * ١٠,٠٠٠ = ٥٠,٠٠٠ ل.س

القيمة الإجمالية للسند: ١٠٠,٠٠٠ + ٥٠,٠٠٠ = ١٥٠,٠٠٠ ل.س

مثال (٢) شراء نفس السند السابق، لكن المصرف يقول في السند بأنه يدفع القيمة الإجمالية للسند لمشتريه في نهاية السنوات الخمس باستخدام طريقة الفائدة المركبة؟

الحل:

طالما أن الفائدة تُدفع في نهاية السنوات الخمس فهي فائدة مركبة، فالقيمة الإجمالية للسند في نهاية السنوات الخمس: $1000(1+10\%)^5$ = ١٦١٠٥١ ل.س

مجموع الفوائد على ٥ سنوات: ١٦١٠٥١ – ١٠٠٠٠٠ = ٦١٠٥١ ل.س

الفرق بين الفوائد بالحساب البسيط وبالحساب المركب تساوي ٦١٠٥١ – ٥٠٠٠٠ = ١١٠٥١ ل.س

وتمثل هذه القيمة فوائد الفوائد.

تطبيق أولي: القيمة المستقبلية لليرة واحدة.

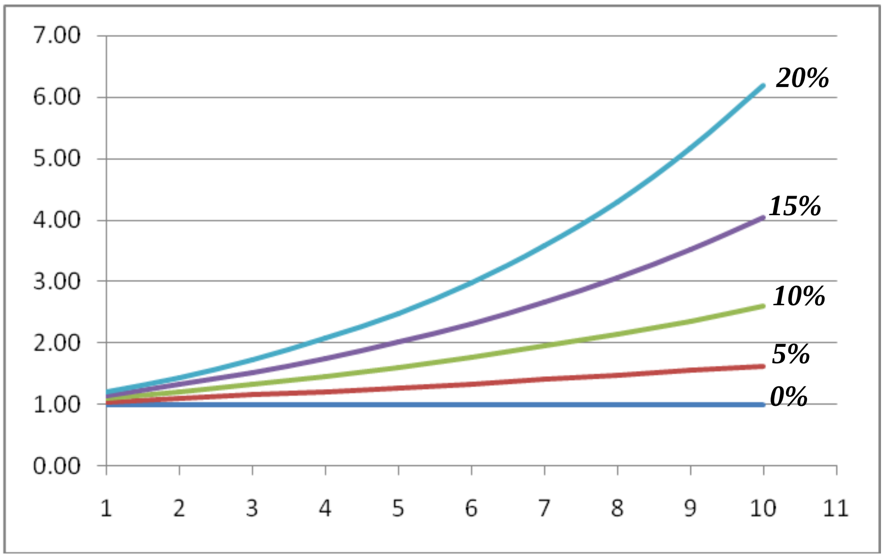
ما هي قيمة ليرة سورية واحد بعد سنة، سنتين، ٣ سنوات، . . .، ١٠ سنوات وبمعدلات فوائد (تضخم) مختلفة: ٥%، ١٠%، ١٥%، ٢٠% ؟

يتفق الجميع أن قيمة الليرة ستنخفض مستقبلاً في حال كان التضخم موجباً، لكن بكم؟

قيمة الليرة المستقبلية = قيمة الليرة الحالية + التضخم على الليرة

= ١ + معدل التضخم (ليكن ٥%) مضروباً بـ ١ = ١+٠,٠٥ = ١,٠٥

يبين المخطط الآتي أشكال القيم المستقبلية لليرة مع معدلات تضم مختلفة:



هناك جداول نجدها في معظم الكتب عن قيمة ليرة واحدة بعد عدة سنوات من أجل معدلات فوائد مختلفة، لكن مع توفر الحاسبات لم تعد هذه الجداول ذات فائدة كبيرة.

٣- الدفعات الدورية

عندما يتم شراء سند ما (الاستثمار) ويتم الاتفاق على شروطه، يمكن احتساب قيمته الإجمالية بطرق عديدة:

١. كدفعات دورية متساوية (أقساط) بتقسيم قيمته الإجمالية على عدد الفترات (سنوات، أشهر، ...) وبالتالي نلجأ إلى حساب القسط الدوري.

٢. أو كدفعات دورية غير متساوية، وتُصبح الحالة هذه أكثر تعقيداً.

٣. أو دفعة واحدة في بداية السند وتُعادل قيمته الإجمالية في هذه الحالة ما ندعوه القيمة الحالية الصافية *Net Prsent Value*.

٤. أو دفعة واحدة في نهاية السند وتُعادل قيمته الإجمالية في هذه الحالة ما ندعوه القيمة المستقبلية *Futur Value*.

بمعنى أن متغيرات الاستثمار أي: المبلغ الأصلي، معدلات الفوائد، عدد فترات استرداده، قيم الأقساط الدورية، هي ما تسمح بحساب قيمة الاستثمار.

سنرى هذه الحالات بدءاً من الحالات البسيطة وصولاً إلى الحالات الأكثر تعقيداً، لكن مع التركيز أن منطق الحسابات يبقى نفسه.

٣-١ جملة دفعات دورية متساوية بالفائدة البسيطة

لنأخذ المثال السابق، شراء شهادة استثمار من مصرف التسليف الشعبي قيمتها ١٠٠ ألف ل.س بمعدل فائدة سنوية ١٠% تُدفع سنوياً من قبل المصرف، ولمدة ٥ سنوات. فما هي الدفعة الدورية المتوجب دفعها سنوياً في حال دفع أصل المبلغ سنوياً؟

<u>الحل:</u>

أولاً يتوجب حساب القيمة الإجمالية للاستثمار = مبلغ الاستثمار الأصلي + الفوائد

مجموع الفوائد كفائدة بسيطة: ١٠٠,٠٠٠ * ١٠% * ٥ = ٥٠,٠٠٠ ل.س

القيمة الإجمالية للسند: ١٠٠,٠٠٠ + ٥٠,٠٠٠ = ١٥٠,٠٠٠ ل.س

تُصبح الدفعة الدورية السنوية (باعتبار أنها متساوية): ١٥٠,٠٠٠ / ٥ = ٣٠,٠٠٠ ل.س

ويمكن أن تُحسب أيضاً كما يلي: الفائدة السنوية + القسط السنوي من أصل المبلغ

١٠,٠٠٠ + (١٠٠,٠٠٠ / ٥) = ٣٠,٠٠٠ ل.س

والسؤال المطروح حالياً، طالما أن هناك أقساط تُدفع من أصل المبلغ سنوياً فهذا يعني أن مبلغ الاستثمار يتناقص سنوياً بمقدار القسط المدفوع كل سنة، وبالتالي يكون المصرف قد دفع فوائد أكثر في حال اعتماد الفائدة البسيطة (كون الفائدة السنوية تُحسب على أساس كامل المبلغ الأصلي أي الـ ١٠٠ ألف)، في حين أنه يُفترض ألا يدفع فوائد إلا على المبلغ الفعلي المتبقي الذي يتناقص بمقدار الأقساط المدفوعة. ولتوضيح هذه الفروقات سنلخصها في الجدول الآتي:

	أصل الاستثمار	الفائدة السنوية
١	١٠٠,٠٠٠	١٠,٠٠٠
٢	٨٠,٠٠٠	٨,٠٠٠
٣	٦٠,٠٠٠	٦,٠٠٠
٤	٤٠,٠٠٠	٤,٠٠٠
٥	٢٠,٠٠٠	٢,٠٠٠
مجموع		**٣٠,٠٠٠**

كما نُلاحظ، يكون مجموع الفوائد في هذه الحال يساوي ٣٠,٠٠٠ ل.س، وبالتالي يجب أن تكون الدفعة الدورية السنوية تساوي ٢٠,٠٠٠ + (٣٠,٠٠٠ / ٥) = ٢٦,٠٠٠ ل.س.

٣-٢ جملة دفعات دورية متساوية بالفائدة المركبة

لا يختلف المنطق هنا كثيراً عن السابق، إذ يتم احتساب الفوائد بالطريقة المركبة ومن ثم تُضاف إلى أصل المبلغ ويتم التقسيم على عدد الفترات الزمنية المحددة، أو بالأخذ بالاعتبار الأقساط السنوية المدفوعة وتنزيلها من أصل المبلغ.

لنأخذ نفس المثال السابق، استثمار ١٠٠ ألف ل.س وبفائدة ١٠% سنوياً لمدة ٥ سنوات. حيث يتم دفع أصل المبلغ على شكل أقساط متساوية سنوياً.

في حال دفع أقساط سنوية متساوية من أصل المبلغ يساوي كل منها (١٠٠,٠٠٠/٥=٢٠,٠٠٠)، يتوجب حساب الفوائد على أصل المبلغ المتبقي فقط وإضافتها إلى المبلغ في نهاية كل فترة ومن ثم حساب الفوائد من جديد بعد تنزيل القسط المدفوع، وتكرار هذه العملية حتى نهاية المدة.

	أصل الاستثمار المتبقي + فوائد الفترة السابقة	الفائدة السنوية عن الفترة السابقة
١	١٠٠,٠٠٠	١٠,٠٠٠
٢	(١٠٠,٠٠٠−٢٠,٠٠٠)+١٠,٠٠٠ = ٩٠,٠٠٠	٩,٠٠٠
٣	(٩٠,٠٠٠−٢٠,٠٠٠)+٩,٠٠٠ = ٧٩,٠٠٠	٧,٩٠٠
٤	(٧٩,٠٠٠−٢٠,٠٠٠)+٧,٩٠٠ = ٦٦,٩٠٠	٦,٦٩٠
٥	(٦٦,٩٠٠−٢٠,٠٠٠)+٦,٦٩٠ = ٥٣,٥٩٠	٥,٣٥٩
مجموع		**٣٨,٩٤٠**

وبالتالي يكون مجموع الفوائد في هذه الحالة يساوي ٣٨,٩٤٠ ل.س، وليس ٦١,٠٥١ ل.س، وبالتالي يجب أن تكون الدفعة الدورية السنوية تساوي:

(١٠٠,٠٠٠ + ٣٨,٩٤٠) / ٥ = ٢٧,٧٩٠ ل.س

كما نلاحظ فإن الفرق مجموعي الفوائد في حالتي الفائدة البسيطة والمركبة والبالغ ٣٨,٩٤٠ – ٣٠,٠٠٠ = ٨,٩٤٠ ل.س هو القيمة التقريبية لفوائد الفوائد.

ملاحظة مهمة: يمكن ملاحظة أنه أيضاً هناك جزء من الفوائد يدفع سنوياً ضمن القسط السنوي، وبالتالي يتوجب عدم احتساب فوائدها أيضاً كما فعلنا بالنسبة للقسط السنوي من أصل المبلغ. والملاحظ أيضاً أن حصة الفوائد من إجمالي القسط المدفوع سنوياً يتناقص سنوياً باعتبار أن توزيع الفوائد يتم بالتساوي على مدة الاستثمار، وبالتالي هناك أيضاً نوع من التقريب وعدم العدالة. سنعالج هذه الحالة لاحقاً عند استكمال كافة عناصر دراسة القيمة الحالية أو المستقبلية لاستثمار ما وعلاقاتها بالأقساط الدورية المتساوية.

٣-٣ القيمة الحالية لجملة دفعات دورية متساوية بالفائدة البسيطة

يستند حساب القيمة الحالية (ندعوها *Present Value*) على مفهوم تفضيل استهلاك المبالغ حالياً على استهلاكها مستقبلاً، بمعنى أن المستثمر يفضل أن يستهلك (يقترض مثلاً) مبلغ ما ثم يدفعه على شكل أقساط متساوية في المستقبل متضمنة الفوائد الدورية.

لنبدأ بسنة واحدة مثلاً، ما هي القيمة الحالية لمبلغ ١٠٠ ل.س سنقبضه بعد سنة بفرض أن معدل الفائدة يساوي ١٠%؟

لنفترض أن هذا المبلغ هو X فإن المبلغ يكافئ بعد سنة: المبلغ نفسه + الفوائد على المبلغ

$100 = X + X.t$ حيث t هو معدل الفائدة

وبحل هذه المعادلة نجد أن: $x = \frac{100}{1+t}$ وبالحساب نجد $X = 100/(1+10\%) = 90.91$

وفي حال وجود أقساط متساوية على عدة سنوات، فيجب حساب القيمة الحالية عن القسط الوارد كل سنة، ثم جمع هذه القيم:

إذا كان القسط بعد n سنة هو A، فما هي قيمته الحالية X_n إذا كان معدل الفائدة البسيط يساوي t؟

بالقياس إلى القيمة المستقبلية التي رأينا سابقاً فإن $A = X_n.(1+n.t)$ وبالتالي تكون قيمة X_n:

$$X_n = \frac{A}{1+n.t}$$

وبجمع القيم الحالية للأقساط على طول المدة أي n سنة، تكون القيمة الحالية الإجمالية للأقساط التي ترد سنوياً PV تُحسب كما يلي:

$$PV = \frac{A}{1+t} + \frac{A}{1+2.t} + \frac{A}{1+3.t} + \ldots + \frac{A}{1+n.t}$$

باستخدام رمز الجمع، تُكتب بالشكل الآتي: $PV = \sum_{i=1}^{n} \frac{A}{1+i.t}$

<u>مثال</u>، ما هي القيمة الحالية الصافية لقسط سنوي يساوي ١٠٠٠ ل.س لمدة ٥ سنوات وبمعدل فائدة بسيطة سنوياً تساوي ١٠%؟

الحل:

$$PV = \frac{100}{1+0.1} + \frac{100}{1+2x0.1} + \frac{100}{1+3x0.1} + \frac{100}{1+4x0.1} + \frac{100}{1+5x0.1} = 3892.61$$

٣-٤ القيمة الحالية لجملة دفعات دورية متساوية بالفائدة المركبة

لنفترض حالياً بأننا نتلقى ١٠٠ ل.س سنوياً ولمدة سنتين وبمعدل فائدة مركبة ١٠% سنوياً، فما هي قيمتها الحالية؟

حساب القيمة الحالية لـ ١٠٠ ل.س ستأتي في السنة الثانية:

قبل سنة من نهاية السنة الثانية (أي في نهاية السنة الأولى) تكون قيمة المبلغ $x = \frac{100}{1+t}$

نأخذ هذا المبلغ $x = \frac{100}{1+t}$ الذي حصلنا عليه ثم نحسب قيمته قبل سنة أخرى (أي اللحظة الحالية): هو نفس المبلغ الذي حصلنا عليه مقسوماً على 1+t مرة ثانية وبالتالي يُصبح المبلغ:

$x = \frac{100}{(1+t)^2}$ أي تُصبح القيمة $x = \frac{100}{(1+10\%)^2} = 82.65$

وطبعاً يجب أن يضاف لهذا المبلغ القيمة الحالية للقسط الذي سيأتي في نهاية السنة الأولى والذي حسب سابقاً يساوي ٩٠,٩١ ل.س

ويُصبح بالتالي القيمة الحالية للأقساط على مدى السنتين يساوي: 173.56 = 90.91 + 82.65

لنلخص هذه النتائج بالجدول الآتي:

	السنة الأولى	السنة الثانية	المجموع
القسط السنوي	١٠٠	١٠٠	٢٠٠
القيمة الحالية	٩٠,٩١	٨٢,٦٥	١٧٣,٥٦

بشكل عام إذا كان لدينا مبلغ A_n سيأتي في السنة رقم n فإن قيمته الحالية X_n هي:

$$x_n = \frac{A_n}{(1+t)^n}$$

وإذا كان لدينا نفس القسط يأتي سنوياً لمدة n سنة وبمعدل فائدة t فيجب جمع جميع القيم الحالية لهذه الأقساط كما يلي:

$$PV = \frac{A}{1+t} + \frac{A}{(1+t)^2} + \frac{A}{(1+t)^3} + \ldots + \frac{A}{(1+t)^n}$$

ويمكن أن تُكتب هذه الصيغة باستخدام رمز الجمع كما يلي:

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{A}{(1+t)^i}$$

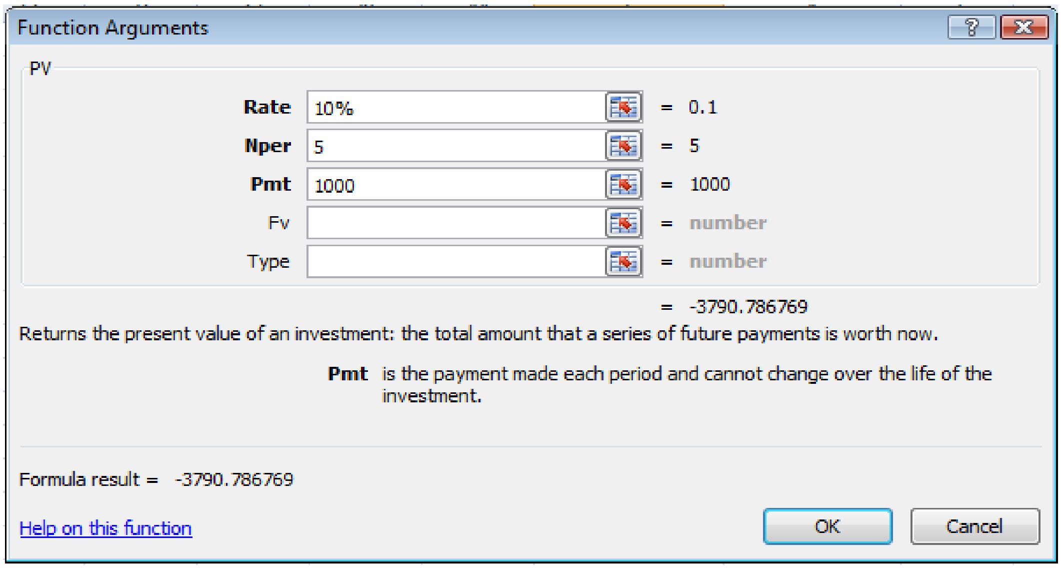
مثال: ما هي القيمة الحالية لقسط سنوي يساوي ١٠٠٠ ل.س سنوياً ولمدة ٥ سنوات إذا كان معدل الفائدة يساوي ١٠% سنوياً؟

الحل:

$$PV = \frac{1000}{1+0.1} + \frac{1000}{(1+0.1)^2} + \frac{1000}{(1+0.1)^3} + \frac{1000}{(1+0.1)^4} + \frac{1000}{(1+0.1)^5} = 3790.79$$

ملاحظة، الفرق بين مبلغي القيمتين الحاليتين بحساب الفوائد بالشكل البسيط أو المركب هو فوائد الفوائد: ٣٨٩٢,٦١ – ٣٧٩٠,٧٩ = ١٠١,٨٢ ل.س

<u>استخدام *Excel*:</u> يمكن استخدام الصيغ المالية الموجودة في برنامج *Excel* لحساب هذه القيمة.



<u>مثال:</u> ما هي القيمة الحالية لقسط سنوي يساوي ٢٠,٠٠٠ ل.س لمدة ٨ سنوات بفائدة بسيطة ومركبة ٠,٥% شهرياً.

أولاً– بفائدة بسيطة

معدل الفائدة السنوية يساوي ٠,٥% * ١٢ = ٦%

القيمة الحالية تساوي $PV = \frac{20000}{1+0.06} + \frac{20000}{1+2x0.06} + \ldots + \frac{20000}{1+8x0.06} = 127492$

ثانياً – بفائدة مركبة

معدل الفائدة السنوية يساوي 12^(1+0.5) = ٦,٦١٧%

القيمة الحالية تساوي

$$PV = \frac{20000}{1+0.06} + \frac{20000}{(1+0.06)^2} + \ldots + \frac{20000}{(1+0.06)^8} = 124196$$

٤ – استهلاك القروض

بعد الحصول على القرض، يتوجب دفع مبلغ هذا القرض سواء دفعة واحدة في تاريخ محدد أو على دفعات إضافةً إلى الفوائد المستحقة على مبلغ القرض. يمكن دفع مبلغ القرض على شكل دفعات متساوية، أو بدفعات غير متساوية، ... وبالتالي هناك خيارات عديدة لتسديد القرض.

لنبدأ بمناقشة استهلاك القروض بدءاً من الحالات البسيطة إلى الأكثر تعقيداً.

٤-١ قرض دون فوائد

اقتراض مبلغ ١٠٠,٠٠٠ ل.س يُقسط على مدى خمس سنوات بدفعات متساوية، وبدون أية فوائد.

فتكون قيمة القسط السنوي تساوي ١٠٠,٠٠٠ / ٥ = ٢٠,٠٠٠ ل.س

٤-٢ قرض يُستهلك دفعة واحدة في نهاية فترة التقسيط

اقتراض مبلغ ١٠٠,٠٠٠ ل.س حالياً وإعادتها للمصرف دفعة واحدة بعد ٥ سنوات، وبمعدل فائدة فائدة بسيطة ١٠% سنوياً. فما هي قيمة القسط السنوي الواجب دفعه حالياً؟

كما نلاحظ أن مبلغ القرض سيعاد دفعة واحدة في نهاية السنوات الخمس، وبالتالي لا يوجد قسط سنوي من أصل المبلغ، وقيمة القسط السنوي المترتب هو فقط نتيجة للفوائد السنوية كما يلي:

القسط السنوي لسنوات ١، ٢، ٣، ٤ هو الفوائد السنوية: ١٠٠,٠٠٠ * ١٠% = ١٠,٠٠٠ ل.س

القسط السنوي في نهاية السنة الأخيرة هو قيمة الفائدة السنوية عن السنة إضافةً إلى أصل مبلغ القرض: ١٠٠,٠٠٠*١٠% + ١٠٠,٠٠٠ = ١١٠,٠٠٠ ل.س.

٤-٣ قرض يُستهلك دفعة واحدة في بداية الفترة

لنأخذ حالة معاكسة للسابقة، أي اقتراض مبلغ ما حالياً ودفع مبلغ ١٠٠,٠٠٠ ل.س دفعة واحدة في نهاية السنوات الخمس بمعدل فائدة ١٠% سنوياً. فما هي قيمة مبلغ القرض الذي سيقبضه فعلياً المُقترض في اللحظة الحالية؟

كما نلاحظ المطلوب إيجاد القيمة الحالية الصافية لمبلغ قيمته ١٠٠,٠٠٠ ل.س سيُدفع بعد ٥ سنوات بمعدل فائدة ١٠%:

$$PV = \frac{100.000}{(1+0.1)^5} = \frac{100.000}{1.6105} = 62092.5$$

وبالتالي نجد أن قيمة الفوائد تساوي: ١٠٠,٠٠٠ – ٦٢٠٩٢,٥ = ٣٧٩٠٧,٥ ل.س

٤-٤ استهلاك القروض على شكل أقساط سنوية

الحالة الأكثر تعقيداً هي عندما يتوجب دفع أقساط سنوية متساوية يتكون القسط من جزأين: جزء من أصل المبلغ والجزء الآخر الفوائد المستحقة.

لنفترض أنه تم اقتراض ١٠٠,٠٠٠ ل.س يُقسط على شكل دفعات متساوية لمدة ٥ سنوات بمعدل فائدة ١٠% سنوياً، فما هو إجمالي القسط المطلوب دفعه سنوياً؟ وما هي قيمة الجزء من القسط من أصل المبلغ؟ وما هي قيمة الجزء المكون للفوائد السنوية؟

الطريقة المنطقية لحل هذه المسألة هي ببناء جدول القرض كما يلي:

السنة	باقي أصل المبلغ	جزء الفوائد	جزء أصل المبلغ	إجمالي القسط
١	١٠٠,٠٠٠	١٠٠,٠٠٠ * ١٠% = ١٠,٠٠٠	٢٠,٠٠٠	٣٠,٠٠٠
٢	٨٠,٠٠٠	٨٠,٠٠٠ * ١٠% = ٨,٠٠٠	٢٠,٠٠٠	٢٨,٠٠٠
٣	٦٠,٠٠٠	٦٠,٠٠٠ * ١٠% = ٦,٠٠٠	٢٠,٠٠٠	٢٦,٠٠٠
٤	٤٠,٠٠٠	٤٠,٠٠٠ * ١٠% = ٤,٠٠٠	٢٠,٠٠٠	٢٤,٠٠٠
٥	٢٠,٠٠٠	٢٠,٠٠٠ * ١٠% = ٢,٠٠٠	٢٠,٠٠٠	٢٢,٠٠٠
مجموع		٣٠,٠٠٠	١٠٠,٠٠٠	١٣٠,٠٠٠

أي أن إجمالي القرض مع الفوائد يساوي ١٣٠,٠٠٠ ل.س، وكما نلاحظ أن القسط السنوي ليس متساوياً، إذ تم تثبيت الجزء من أصل المبلغ (١٠٠,٠٠٠/٥ = ٢٠,٠٠٠ ل.س)، وتم حساب الفوائد على المبلغ المتبقي للسنة المعنية.

لكن الحالة الأكثر اعتماداً هي بحساب القرض على أساس أقساط سنوية متساوية، وهنا يتوجب علينا العودة إلى معادلة القيمة الحالية الصافية والمتغير في هذه الحالة هو قيمة القسط A :

$$PV=\sum_{i=1}^{n}\frac{A}{(1+t)^{i}}$$

$$100.000=\frac{A}{1+0.1}+\frac{A}{(1+0.1)^{2}}+\frac{A}{(1+0.1)^{3}}+\frac{A}{(1+0.1)^{4}}+\frac{A}{(1+0.1)^{5}}$$

بإخراج القسط A خارج الكسور بعد حسابها: $100.000 = 3.7908\ A$

أي أن القسط السنوي A يساوي: A = ١٠٠٠٠٠/٣,٧٩٠٨ = ٢٦٣٧٩,٧٥ ل.س

وبالتالي يُصبح إجمالي قيمة القسط والفوائد يساوي: ٢٦٣٧٩,٧٥ * ٥ = ١٣١٨٩٨,٧ ل.س

وفي هذه الحالة يُبنى جدول القرض كما يلي:

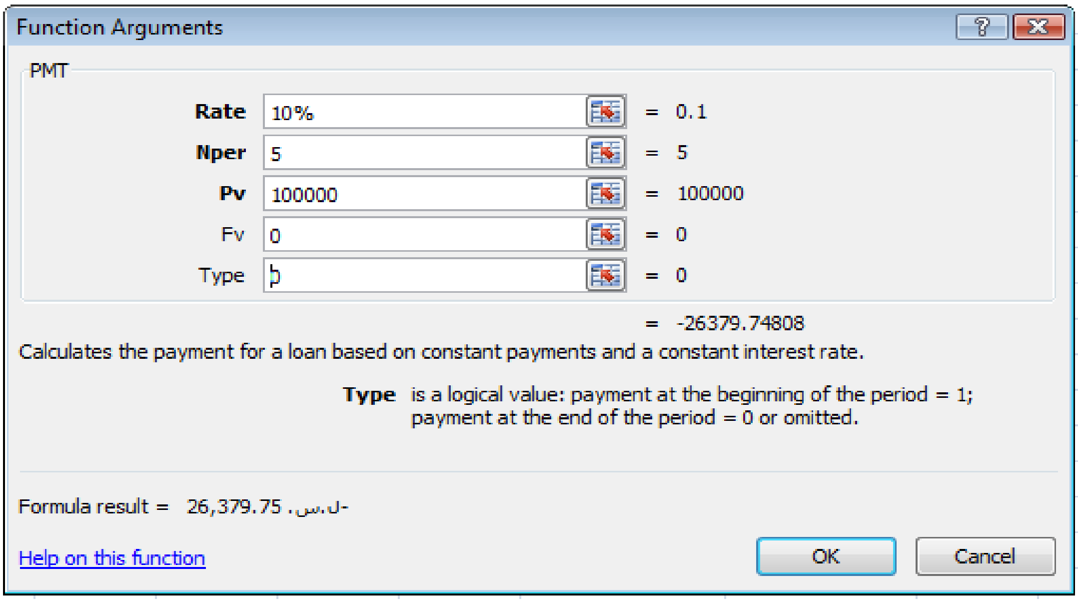
السنة	باقي أصل المبلغ	جزء الفوائد	جزء أصل المبلغ	إجمالي القسط
١	١٠٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠ * ١٠% = ١٠,٠٠٠	١٦٣٧٩,٧٥	٢٦٣٧٩,٧٥
٢	١٠٠٠٠٠ – ١٦٣٧٩,٧٥ = ٨٣٦٢٠,٢٥	٨٣٦٢٠,٢٥ * ١٠% = ٨٣٦٢,٠٢	١٨٠١٧,٧٢	٢٦٣٧٩,٧٥
٣	٨٣٦٢٠,٢٥ – ١٨٠١٧,٧٢ = ٦٥٦٠٢,٥٣	٦٥٦٠٢,٥٣ * ١٠% = ٦٥٦٠,٢٥	١٩٨١٩,٥٠	٢٦٣٧٩,٧٥
٤	٦٥٦٠٢,٥٣ – ١٩٨١٩,٥ = ٤٥٧٨٣,٠٣	٤٥٧٨٣,٠٣ * ١٠% = ٤٥٧٨,٣٠	٢١٨٠١,٤٥	٢٦٣٧٩,٧٥
٥	٤٥٧٨٣,٠٣ – ٢١٨٠١,٤٥ = ٢٣٩٨١,٥٨	٢٣٩٨١,٥٨ * ١٠% = ٢٣٩٨,١٦	٢٣٩٨١,٥٨	٢٦٣٧٩,٧٥
مجموع		**٣١٨٩٨,٧**	**١٠٠,٠٠٠**	**١٣١٨٩٨,٧**

باعتبار أن إجمالي القسط السنوي هو ثابت، فإن قيمة جزء الفوائد تتناقص بسبب تناقص الباقي من أصل المبلغ سنوياً، في حين يتزايد جزء القسط من أصل المبلغ.

كما نلاحظ أن الفرق بين الحالتين السابقتين (حالة الأقساط المتساوية وحالة الأقساط غير المتساوية) يساوي: ١٣١٨٩٨,٧ – ١٣٠٠٠٠ = ١٨٩٨,٧ ل.س يُمثل رصيد فوائد الفوائد.

<u>استخدام *Excel*:</u>

نظراً لتعقيدات الحساب في الحالة الأخيرة، فإنه غالباً ما نلجأ لاستخدام البرمجيات الجاهزة مثل *Excel* وذلك إما ببناء جدول خاص كما رأينا في الجدول السابق، أو باستخدام الصيغ المبرمجة مسبقاً حيث نجد صيغة حساب القسط كما يلي:



٥- اختيار الاستثمارات

ما نقصدر باختيار الاستثمارات أو المفاضلة بينها هو تطبيق لطرق تسمح بالقول أن استثمار ما هو أفضل من استثمار آخر، يمكن تطبيق التقنيات المالية السابقة للمفاضلة بين الاستثمارات. لنبدأ بمثال بسيط يوضح مشكلة المفاضلة بين الاستثمارات، والتي ستوجهنا عن كيفية تطبيق التقنيات المالية.

<u>مثال:</u> لدينا مشروعان A1 و A2 حيث من المتوقع أن نحصل من المشروع الأول بعد سنتين على مبلغ ٥٠٠٠ ل.س مع احتمال ٦٠% أو على مبلغ ٣٠٠٠ ل.س مع احتمال ٤٠%، في حين من المتوقع أن يعطي المشروع الثاني بعد ٣ سنوات مبلغ ٦٥٠٠ ل.س باحتمال ٢٥% أو ٤٠٠٠ ل.س باحتمال ٧٥%، فأي المشروعين يجب أن نختار إذا كان معدل التراكم السنوي يساوي ١٠%؟

إذا اعتمدنا طريقة الحساب البسيطة للقيمة المتوقعة لكل من المشروعين نجدهما متساويتين تقريباً:

$$Ev(A_1) = 60\% \times \frac{5000}{(1+10\%)^2} + 40\% \times \frac{3000}{(1+10\%)^2} = 3470$$

$$Ev(A_2) = 25\% \times \frac{6500}{(1+10\%)^3} + 75\% \times \frac{4000}{(1+10\%)^3} = 3470$$

بمعنى آخر يجب ألا يميز المستثمر فيما بينهما، لكنه قد لا يرى فعلياً أنهما متكافئتين، إذا اختار المشروع الأول فهذا يعني أن منفعته المتوقعة من هذا المشروع أكبر، مما يمكن ترجيحه إلى عدم الرغبة بالمجازفة (تفضيل للزمن الأقل) أو نزعة للقبول بمردود أقل من ١٠%.

ما نقصده بالتراكم المالي Actualisation هو العملية التي يتم بموجبها تحديد ثمن تبديل استهلاك إيراد في المستقبل مقابل استهلاكه حالياً، وكأننا نقول هناك سوق للزمن كأي سوق للسلع والخدمات فالزمن هو مورد ذو طبيعة خاصة، يعبر معدل التراكم عن سعر شراء الوقت في المستقبل أو سعر امتلاك المستقبل، في حين يعبر معدل الفائدة عن العكس سعر بيع الوقت الحاضر أو سعر التخلي عن الحاضر.

<u>مثال:</u> لنفترض بأنه يمكنك الحصول بالتأكيد على مبلغ ١٠٠٠٠٠ ل.س في نهاية السنة ١٠ اعتباراً من تاريخه، ولنفترض أنك بحاجة ماسة إلى مبلغ من المال فوراً، ولدينا مستثمر مستعد

لإعطائك مبلغ أقل حالياً على أن يحصل على الـ ١٠٠٠٠٠ ل.س في نهاية السنة ١٠، فما هو المبلغ الذي تقبله حالياً للتخلي عن المبلغ المستقبلي أي ١٠٠٠٠٠، أي ما هو المبلغ الذي يعادل منفعة ما تحصل عليه حالياً مقابل منفعة المبلغ المستقبلي؟

لنفترض بأنه عُرض عليك الجدول التالي للتفاوض واختيار المبلغ الذي ترى أنه يكافئ مبلغ ١٠٠,٠٠٠ ل.س بعد ١٠ سنوات، بمعنى أدّق الذي يحقق لك نفس المنفعة في الحالتين:

المبلغ الحالي المعروض عليك	**معدل التراكم السنوي الذي يحققه**
١٦١٥٠	%٢٠
١٩١٠٠	%١٨
٢٢٦٦٨	%١٦
٢٦٩٧٤	%١٤
٣٢١٩٧	%١٢
٣٨٥٥٤	**%١٠**
٤٥٣٢٠	%٨
٥٥٨٤٠	%٦
٦٧٥٥٦	%٤

يعتبر معدل التراكم المقابل للقيمة التي تبدل فيها رأيك بين عدم القبول والقبول بالمبلغ الحالي هو معدل التفضيل بين ما تحصل عليه في المستقبل وما تحصل عليه حالياً، بمعنى أن منفعتي الحالتين متساويتين بالنسبة لك، ونقول في هذه الحالة بأن المبلغ الذي تقبل حالياً مقابل التخلي عن المبلغ المستقبلي هو القيمة الحالية (التراكمية) للمبالغ المستقبلية وندعو النسبة (المعدل) الذي يكافئ بين الحالتين معدل التراكم الذي يناسبك، إذا قلت أنك تقبل باستبدال ١٠٠٠٠٠ ل.س في المستقبل مقابل ٣٨٥٥٤ ل.س حالياً، أي أن استثمار هذا المبلغ لمدة ١٠ سنوات بمعدل سنوي يعادل ١٠% يُعادل المبلغ الذي ستحصل عليه في نهاية السنوات العشر : $38554 \times (1+10\%)^{10} = 100000$

والقيمة الحالية تكون صغيرة بقدر نزعتنا (رغبتنا) للامتلاك في الوقت الحالي، أي أن القيمة الحالية مرتبطة بمعدل التراكم الذي نقبل به وبالزمن أيضاً، والعلاقة ذات اتجاه عكسي أي بقدر ما يكون معدل التراكم كبير بقدر ما تكون القيمة الحالية قليلة وبقدر ما يكون زمن تحصيل المبالغ المستقبلية بعيداً بقدر ما تكون القيمة الحالية قليلة أيضاً. ونعبر عنها بالصيغة الآتية: $PV = \dfrac{FV}{F(n,t)}$

t: معدل التراكم n : الزمن FV : Future Value PV : Present Value

يتدخل في حساب معدل التراكم معدل الفوائد الممنوحة في المصارف، النزعة للمخاطرة بشكل عام، معدل التبديل بين العملات.... إلخ.

٥-١ القيمة الحالية الصافية Net Present Value

نعود إلى حساب القيمة الحالية الصافية لتركيز الأفكار. يستند منطق حساب القيمة الحالية الصافية (Net Present Value) على مفهوم التراكم السابق أي على منطق التبديل بين المنفعة الحالية والمنفعة المستقبلية. ولتوضيح آلية حسابها سنعتمد على المفهوم المرافق لها أي القيمة المستقبلية FV: Future Value كونه أسهل للمتابعة.

<u>حالة دفعة ثابتة بعد فترة معينة:</u> لا يختلف أحد معنا حالياً على أنه إذا كان معدل الفائدة يساوي ١٠% سنوياً فإن ١٠٠ ل.س سنوياً تساوي بعد سنة ١١٠ ل.س:

$$\begin{aligned} fv_1(100) &= 100 + 10\% \times 100 = 110 \\ &= 100(1+10\%) \end{aligned}$$

وبعد سنتين تساوي:

$$\begin{aligned} fv_2(100) &= 110 + 10\% \times 110 = 110 + 11 = 121 \\ &= 110(1+10\%) \\ &= 100(1+10\%)(1+10\%) = 100(1+10\%)^2 \end{aligned}$$

وبعد ٣ سنوات تصبح: $fv_3(100) = 100(1+10\%)^3 = 133.1$

وبعد n سنة تصبح: $fv_n(100) = 100(1+10\%)^n$

فإذا رمزنا لمعدل الفائدة بالرمز t وللمبلغ الحالي بالرمز x تصبح المعادلة: $fv_n(x) = x(1+t)^n$

وبالتالي فإن المبلغ الحالي x يحسب على الشكل الآتي: $x = \dfrac{fv(x)}{(1+t)^n}$

وهو ما ندعوه بالقيمة الحالية الصافية للمبلغ الذي سيأتي من x بعد n فترة وبمعدل تراكم ثابت قدره t خلال أيّ من الفترات.

إذا كانت معدلات التراكم مختلفة كل سنة فلا تعديل جوهري على الصيغة:

$$x=\frac{fv(n)}{(1+t_1)(1+t_2)\ldots(1+t_n)}$$

مثلاً إذا كانت الفترة ٣ سنوات ومعدل التراكم في السنة الأولى ١٠% وفي السنة الثانية ١٥% وفي السنة الثالثة ٢٠% تصبح القيمة الحالية الصافية لمبلغ ١٠٠ ل.س الذي سيأتي بعد ٣ سنوات:

$$x=\frac{100}{(1+10\%)(1+15\%)(1+20)}=65.88$$

<u>حالة دفعات دورية:</u> قد تطرح المسألة إذا كانت هناك دفعات سنوية على فترة من الزمن وقد تكون هذه الدفعات متساوية أو غير متساوية، مثلاً ما هي القيمة الحالية الصافية لدفعات سنوية ١٠٠ ل.س على مدة ٣ سنوات وبمعدل فائدة قدره ١٠% سنوياً؟

يمكن أن يتم تجزئة الحساب لكل دفعة سنوية على غرار الحالة السابقة:

السنة الأولى دفعة ١٠٠ ل.س: $NPV_1=\frac{100}{1+10\%}=90.91$

السنة الثانية دفعة ١٠٠ ل.س: $NPV_2=\frac{100}{(1+10\%)^2}=82.64$

السنة الثالثة دفعة ١٠٠ ل.س: $NPV_3=\frac{100}{(1+10\%)^3}=75.13$

تصبح بالتالي القيمة الحالية الصافية للدفعات الثلاث تساوي $90.91+82.64+75.13=248.68$

أما إذا كانت الدفعات السنوية غير متساوية فتحسب بنفس الطريقة باستبدال القيمة الثابتة (١٠٠ ل.س) بدفعة السنة المعينة. وتصبح الصيغة العامة لدفعات دورية متساوية حيث قيمة الدفعة السنوية x على فترة n سنة وبمعدل تراكم t سنوياً:

$$NPV=\frac{x}{1+t}+\frac{x}{(1+t)^2}+\ldots+\frac{x}{(1+t)^n}$$
$$=x\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{(1+t)^2}+\ldots+\frac{1}{(1+t)^n}\right)=x\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+t)^i}$$

ولا يوجد ما يمنع أن تكون معدلات التراكم أو الدفعات الدورية غير متساوية عندها تحسب بشكل تفصيلي لكل دفعة في حينها.

يستخدم معيار القيمة الحالية الصافية كمعيار للمفاضلة بين مشاريع استثمارية ويفضل أن تكون لها نفس المدد الزمنية حيث يؤخذ بالاعتبار جميع التدفقات المالية بما فيها المبالغ المستثمرة في بداية الفترة أو في أي لحظة كانت وتوضع بإشارة سالبة في حين توضع الإيرادات بإشارة موجبة:

- ✓ **إذا كانت القيمة الحالية الصافية > الصفر : فالاستثمار مربح**
- ✓ **إذا كانت القيمة الحالية الصافية < الصفر : فالاستثمار خاسر**
- ✓ **وإذا كانت = الصفر فالاستثمار لا رابح ولا خاسر**

وإذا كانت لدينا عدة مشاريع استثمارية نختار المشروع ذو القيمة المالية NPV الأكبر شريطة أن تكون أكبر من الصفر.

<u>ملاحظات على القيمة الحالية NPV والقيمة المستقبلية VF</u>

أ- لا تأخذ بالاعتبار إلا ما يمكن التعبير عنه مالياً.

ب-صعوبة تحديد معدلات التراكم في المستقبل.

ج-يتم الحساب عادةً باستخدام قيم متقطعة لغايات البساطة والتقريب، وقد تختلف النتائج بشكل طفيف في حال استخدام صيغ تستخدم متغيرات مستمرة. إذ أنّ مفهوم التراكم يتضمن الاستمرارية في الزمن، لنأخذ مثالاً توضيحياً:

ليكن معدل التراكم السنوي ١٢%، لنفترض حساب القيمة المستقبلية لاستثمار ١٠٠ ل.س،

حالة (١): الاستثمار مرة واحدة كل سنة

$$VF(100) = 100(1+12\%) = 112$$

حالة (٢): الاستثمار يمكن أن يعاد استثماره فصلياً. يجب أولاً حساب معدل التراكم الفصلي. جرت العادة على حساب المعدل الفعلي من السنوي وبتقريب مقبول بتقسيم الفائدة السنوية على ٤ فصول: $\frac{12}{4} = 3\%$

الفصل الأول: $VF_1(100) = 100(1+3\%) = 103$

الفصل الثاني: استثمار نتيجة الفصل الأول $VF_2(100) = 103(1+3\%) = 106.09$

الفصل الثالث: استثمار نتيجة الفصل الثاني $VF_3(100) = 106.09(43\%) = 109.2727$

الفصل الرابع: $VF_4(100) = 109.2727(1+3\%) = 112.5509$

وهي نفس النتيجة إذا استخدمنا الصيغة $VF_4(100) = 100(1+3\%)^4 = 112.5509$

نجد أن الفرق بين الحالتين الأولى (الحساب السنوي) والثانية (الحساب الفصلي):

$$112.5509 - 112 = 0.5509$$

وفي حالة إعادة الاستثمار شهرياً (١٢ مرة) تصبح القيمة التراكمية في نهاية السنة:

$$VF(100) = 100(1+1\%)^{12} = 112.6825$$

والفرق عن الحساب السنوي يساوي ٠,٦٨٢٥

وفي حالة إعادة الاستثمار يومياً (٣٦٥ مرة):

$$VF(100) = 100\left(1+\frac{12\%}{165}\right)^{365} = 112.7475$$

نلاحظ أن الفروقات غير مهملة خصوصاً إذا كانت المبالغ كبيرة، مع ملاحظة أيضاً أن حساب الفائدة الفصلية بتقسيم على ٤ أو الشهرية بتقسيم على ١٢ في حين كان يجب حساب الفائدة الفصلية كما لو أن الفائدة أيضاً تخضع للتراكم

$$1+t_a = (1+t_S)^4$$
$$1+12\% = (1+t_S)^4$$

حيث t_a : فائدة سنوية و t_S : فائدة فصلية

مما يؤدي إلى أن معدل التراكم الفصلي t_S يساوي: ٢,٨٧% وليس ٣%.

وفي حساب معدل التراكم الشهري:

$$1+t_a=(1+t_m)^{12}$$
$$1+12\%=(1+t_m)^{12}$$

مما يؤدي إلى معدل تراكم شهري مقداره حوالي ٠,٩٥% وليس ١%.

أيضاً تختلف النتائج السابقة إذا تم الأخذ بالاعتبار لهذه الملاحظات.

٥-٢ معيار المردود الداخلي للاستثمار Internal Rate of Return (IRR)

هو بالتعريف معدل التراكم الذي يساوي في لحظة معينة بين الاستثمارات والإيرادات الناجمة عنها، بمعنى آخر هو المعدل الذي يجعل القيمة الحالية الصافية تساوي الصفر:

$$NPV=I_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{(1+t)^i}=0$$

حيث I_0 هو المبلغ المستثمر في اللحظة صفر أي لحظة حساب NPV.

لاعتماد مشروع استثماري على أنه رابح يجب أن يكون هذا المعدل IRR أكبر من معدل تكاليف الاستثمار (معدل الاقتراض، عمولات، ...)، حيث نفترض أنه سيتم اقتراض كامل مبلغ الاستثمار بمعدل فائدة t واستثمار هذه المبالغ:

IRR > t الاستثمار رابح

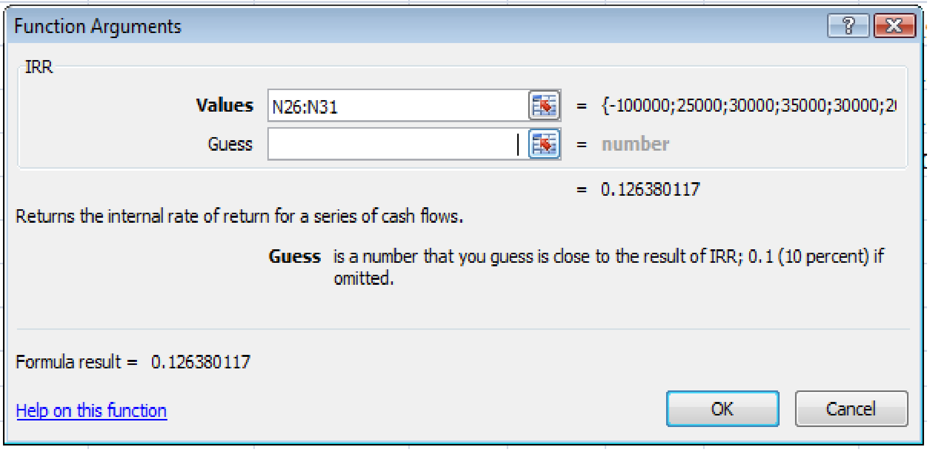
IRR < t الاستثمار خاسر

IRR = t الاستثمار لا رابح ولا خاسر

وإذا كان لدينا عدة مشاريع استثمارية نختار المشروع ذو المعدل الأكبر شريطة أن يكون أكبر من معدل تكاليف الاستثمار.

نظراً للصعوبة الرياضاية في حساب قيمة معدل العائد على الاستثمار، فإنه غالباً ما يتم اللجوء للطرق التجريبية أو باستخدام البرامج المعلوماتية مثل Excel.

رقم الفترة	التدفقات
0	-100,000
1	25,000
2	30,000
3	35,000
4	30,000
5	20,000



معدل العائد على الاستثمار الذي يظهر في هذا المثال يساوي ١٢,٦٤% فالاستثمار إذاً رابح إذا كان أكبر من معدل الفائدة المُعتمد.

٥-٣ معيار مدة استرداد رأس المال Pay Back Period

رغم الملاحظات الكثيرة على هذا المعيار وهي ليست أكثر من تلك التي يمكن سردها فيما يتعلق بالطرق البسيطة الأخرى، لكنه مؤشر غير مُضرّ. هو الزمن اللازم لاسترداد المبالغ المستثمرة مع الانتباه إلى ضرورة مقارنة المبالغ في نفس اللحظة الزمنية وإلا يفقد المعيار معناه.

مثال: كم من الزمن نحتاج لاسترداد استثمار ١٠٠ ل.س بمعدل تراكم سنوي ١٠%، حيث الربح الصافي في السنة الأولى ٣٠ ل.س وفي السنة الثانية ٤٠ ل.س وفي السنة الثالثة ٥٠ ل.س وفي الرابعة ٤٠ ل.س.

رقم السنة	الإيراد الخام	القيمة المالية للإيراد الخام	مجموع الإيرادات
١	٣٠	٢٧,٣	٢٧,٣
٢	٤٠	٣٣,١	٦٠,٤
٣	٥٠	٣٧,٦	٩٨
٤	٤٠	٢٧,٤	١٢٥,٤

نلاحظ أنه خلال ٣ سنوات تقريباً يتم استرداد رأس المال المستثمر أي الـ ١٠٠ ل.س.

٤-٥ ملاحظات على المعايير المالية في اختيار الاستثمارات

لا شك أن هذه المعايير مساعدة في اتخاذ القرارات الاستثمارية، لكن الأكيد أيضاً أن الحكم الإجمالي على اختيار المشروع أم لا أو المفاضلة بين المشاريع يتم وفق معيار وحيد في كل حالة، ولن نفاجئ إذا كانت نتائج هذه المعايير متناقضة كما تبين الأمثلة الآتية. ليكن لدينا الاستثماران A و B المعرفين كما يلي:

السنة	الاستثمار A		الاستثمار B		القرار
	تدفق سنوي	تدفق محين	تدفق سنوي	تدفق محين	
	-10,000	-10,000.0	-20,000	-20,000.0	
1	2,200	2,000.0	6,000	5,454.5	
2	2,300	1,900.8	6,000	4,958.7	
3	2,400	1,803.2	6,000	4,507.9	
4	2,500	1,707.5	8,000	5,464.1	
5	2,500	1,552.3			
6	2,400	1,354.7			
معدل التراكم	**10%**		**10%**		
NPV	**289.6**		**350.2**		**الاستثمار B**
IRR	**11.06%**		**10.85%**		**الاستثمار A**

لدى مقارنتهما وفق القيمة الحالية الصافية نجد أن الاستثمار B هو الأفضل، في حين يُظهر معيار العائد على الاستثمار بأن A هو الأفضل. أي ليس بالضرورة أن تكون نتائج الطريقتين منسجمة!

ولدى تطبيق الطريقة الثالثة المتعلقة بمدة استرداد رأس المال على نفس المثالين مع إضافة استثمار ثالث C وفق الجدول الآتي:

مقارنة ثلاث استثمارات بمعدل تراكم سنوي ثابت ١٠%

السنة	الاستثمار A		الاستثمار B		الاستثمار C	
	تدفق محين	الباقي	تدفق محين	الباقي	تدفق محين	الباقي
	-10,000	-10,000	-20,000	-20,000	-30,000	-30,000
1	2,000	-8,000	5,455	-14,545	13,637	**-16,363**
2	1,901	-6,099	4,959	-9,587	16,529	**166**
3	1,803	-4,296	4,508	**-5,079**		
4	1,708	-2,588	5,464	**385**		
5	1,552	**-1,036**				
6	1,355	**319**				
NPV	**289.6**		**350.2**		**150.3**	
IRR	**11.06%**		**10.85%**		**10.39%**	
PBP	**5.97** سنة		**3.98** سنة		**1.99** سنة	

نجد أن الاستثمار الثالث هو الأفضل، وبالتالي أي من الطرق يجب اعتمادها إذا كانت كل منها تعطي الأفضلية لمشروع مختلف الآخرين؟! نستطيع بهذه الحالة توجيه قرار الاستثمار كما نريد وهذا لا ينسجم مع الموضوعية والأمانة العلمية.

لا نستطيع في الحقيقة تبرير اختيار هذا المعيار أو ذاك، لكن ماذا لو اعتبرنا أن كل معيار يمثل وجهة نظر أحد المستثمرين (المساهمين) وبالتالي يتطلب التفكير بطرق أخرى تأخذ بالاعتبار وجهات النظر هذه الأطراف. بالتأكيد ليس المجال حالياً في هذا المقرر للحديث عنها.

٦- تمارين وتطبيقات

تطبيق (١): حساب معدل الفائدة.

يمكنك الاستثمار في مشروع عقاري لمدة عام واحد، حيث تضع ١٢٥٠ ألف ليرة سورية، فتستعيد بعد سنة مبلغ ١٣٥٠ ألف ل.س، فما هو معدل الفائدة التي يحققها المبلغ الذي وضعته؟

الحل:

ليكن معدل الفائدة t

المبلغ المستقبلي = المبلغ الحالي + الفوائد،

الفوائد = المبلغ الحالي * معدل الفائدة

إذاً، المبلغ المستقبلي = المبلغ الحالي (١ + معدل الفائدة)

أي ١٣٥٠ = ١٢٥٠ (t + ١) ومنه $1+t = 1350/1250=1.08$

أي $t = 1.08 - 1 = 0.08$ أو $t = 8\%$.

تطبيق (٢): مضاعفة استثمار.

طرح عليك استثمار بمضاعفة أي مبلغ تضعه كل ١٠ سنوات، فما هو معدل العائد الداخلي لهذا الاستثمار؟

الحل:

ليكن المبلغ الحالي PV، والمبلغ المستقبلي FV ويساوي ضعف PV، ومعدل التراكم t وهو المعدل الذي نبحث عنه،

نستخدم معادلة من الشكل $FV = PV(1+t)^{10}$ أي $2PV = PV(1+t)^{10}$

وبالتالي: $(1+t)^{10} = 2$ وحيث أنها معادلة صعبة الحل نستخدم بعض القيم التجريبية من أجل t لنحصل على المساواة مع ٢، ثم بتقريبات متتالية يمكن إيجاد قيمة تقريبية لمعدل التراكم:

t	5%	7%	7.1%	**7.18%**	7.5%	8%	10%
$(1+t)^{\wedge 2}$	1.629	1.967	1.986	**2.0005**	2.061	2.159	2.594

وبالتالي نعتبر أنه من أجل $t = 7.18\%$ تقريباً، فإن المبلغ يتضاعف كل عشر سنوات.

تطبيق (٣): التخطيط للتقاعد.

تخطط منذ الآن لتقاعدك بعد ٥٠ سنة بحيث يكون لديك في بداية تقاعدك مليون ل.س، لديك حالياً رصيد ١٠,٠٠٠ ل.س، فما هو معدل الفائدة الذي تقبل به ويجعل رصيدك يحقق حلمك؟

الحل:

القيمة الحالية $PV = 10.000$

القيمة المستقبلية $FV = 1.000.000$ بعد ٥٠ سنة

نطبق معادلة القيمة المستقبلية $FV = PV(1+t)^{50}$

أو بالتبديل $1.000.000 = 10.000(1+t)^{50}$

أي $(1+t)^{50} = \dfrac{1.000.000}{10.000} = 100$

بالتجريب كما في المثال السابق نحصل على معدل فائدة يساوي تقريباً ٩,٦٥%.

تطبيق (٤): حساب معدل المردود الداخلي *IRR*.

لدينا مشروع استثمار ٤٣٥,٤٤ ل.س في بدايته، ثم تدفقات سنوية كما يلي: ١٠٠ في السنة الأولى، ٢٠٠ في السنة الثانية، ٣٠٠ في السنة الثالثة. والمطلوب:

١) إذا طلبنا معدل مردود داخلي يساوي ١٨%، فهل سيكون المشروع مربح؟

٢) إذا طلبنا معدل مردود داخلي يساوي ١٢%، فهل سيكون المشروع مربح؟

٣) ما هو معدل المردود الداخلي لهذا الاستثمار؟

الحل:

لنضع جدول تدفقات المشروع كما يلي:

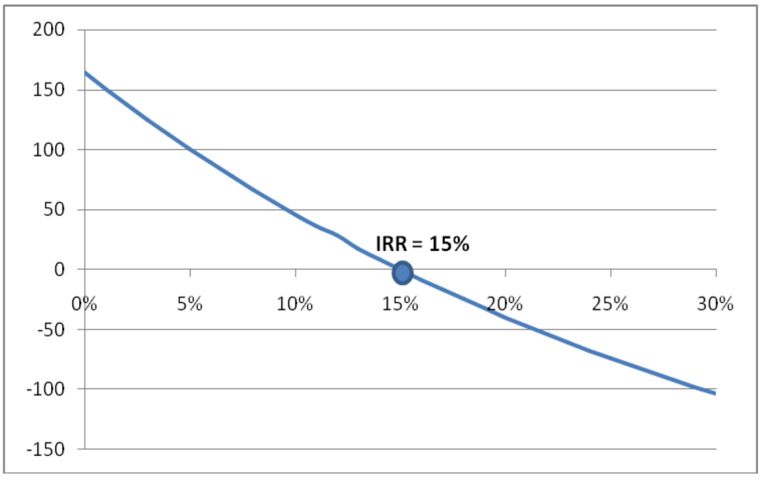
الفترة	التدفق الجاري	التدفق المحين من أجل ١٢%	التدفق المحين من أجل ١٨%
٠	– ٤٣٥,٤٤	– ٤٣٥,٤٤	– ٤٣٥,٤٤
١	١٠٠	٨٩,٢٩	٨٤,٧٥
٢	٢٠٠	١٥٩,٤٤	١٤٣,٦٤
٣	٣٠٠	٢١٣,٥٣	١٨٢,٨٩
القيمة الحالية الصافية	**١٦٤,٥٦**	**٢٦,٨٢**	**– ٢٤,٤٨**

من أجل معدل ١٨% فإن القيمة الحالية الصافية تساوي –٢٤,٤٨ أي المشروع غير رابح،

ومن أجل معدل يساوي ١٢% فالقيمة الحالية الصافية تساوي ٢٦,٨٢ أي المشروع رابح،

إذاً، من أجل أن تكون القيمة الحالية الصافية تساوي الصفر يجب أن يكون معدل المردود الداخلي بين ١٢% و ١٨%، ولحسابه نقول بتجريب عدد من القيمة:

المعدل	القيمة الحالية الصافية
١٣%	١٧,٦٠
١٤%	٨,٦٦
١٥%	**٠,٠٠**
١٦%	– ٨,٤٠
١٧%	– ١٦,٥٦



أي أنه بمعدل ١٥% فإن المشروع لا رابح ولا خاسر، إذا كان أكبر فإن القيمة الحالية الصافية تصبح سالبة، وقيمة أقل يصبح المشروع رابح.

تطبيق (٥): حساب قيمة أصل المبلغ.

تم وضع مبلغ x في المصرف بفائدة بسيطة t، فبلغت قيمة المبلغ مع الفوائد ٢٢٠ ليرة بعد سنة، و ٢٤٠ ليرة بعد سنتين.

فما هي قيمة أصل المبلغ x، وما هو معدل الفائدة t ؟

الحل: $x = 200,\ \ t = 10\%$

تطبيق (٦): حساب مدة قرض.

اقترض أحد التجار ثلاثة مبالغ من المصرف كما يلي:

القرض الأول: مبلغ ١٠٠٠٠ ل.س لمدة ستة أشهر،

القرض الثاني: مبلغ ٢٠٠٠٠ ل.س لمدة ٤ أشهر،

القرض الثالث: مبلغ ٥٠٠٠٠ ل.س لمدة n شهر.

دفع فوائد بسيطة على جميع هذه المبالغ مقدارها ٢٤٠٠ ل.س، علماً بأن معدل الفائدة يساوي ١٠% سنوياً.

ما هي مدة القرض الثالث n ؟

الحل: $n = 2$ شهران.

تطبيق (٧): استثمار مركب.

اشترى أحد التجار بضاعة بسعر ١٠٠ ألف ل.س وباعها بعد إضافة هامش ربح يساوي ٢٠%،

أضاف إلى مبلغ المبيعات مبلغاً إضافياً y، ووظف المجموع (المبيعات والإضافي) في المصرف بمعدل فائدة ١٥% سنوياً فحصل على مبلغ إجمالي بعد سنة يساوي ١٩٥٥٠٠ ل.س.

فما هو المبلغ y الذي أضافه التاجر على مبلغ المبيعات ؟

الجواب: $y = 50000$

تطبيق (٨): حساب القيمة المستقبلية.

يملك مستثمر مبلغاً قدره ١٠٠ ألف ل.س يرغب بتوظيفه لمدة عام، ولديه الخيارات الآتية:

الأول: وضع المبلغ في المصرف بفائدة قدرها ١٥%.

الثاني: توظيف المبلغ لمدة أربعة أشهر بفائدة مركبة تساوي ١٠% سنوياً، ثم توظيف الحصيلة لأربعة أشهر أخرى بفائدة مركبة ١٥% سنوياً، وتوظيف الحصيلة الناتجة أيضاً لمدة أربعة أشهر بفائدة مركبة ٢٠% سنوياً.

الثالث: توظيف المبلغ شهرياً بمعدل فائدة يبدأ بـ ١٠% سنوياً في الشهر الأول ويتزايد كل شهر بمقدار ١% على أساس سنوي، أي يتم توظيف حصيلة المبلغ مع الفوائد في نهاية كل شهر للشهر اللاحق.

الجواب: (توجيه: حساب القيمة المستقبلية للخيارات الثلاث في نهاية العام)

الأول: ١١٥٠٠٠، الثاني: ١١٦٠٦٧، الثالث: ١١٨٧٨٣