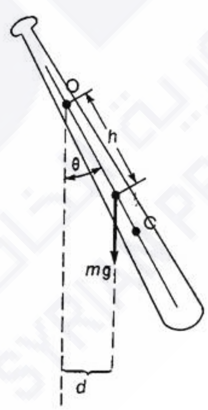
إن الطريقة السهلة والمريحة لقياس عزم عطالة الجسم بالنسبة لأي محور تتم عن طريق قياس دور اهتزاز هذا الجسم بالنسبة لهذا المحور. لنفرض أن مركز كتلة عصا غير متماثلة الأبعاد وكتلتها 1,6kg يقع على مسافة قدرها 42cm من إحدى نهايتيها. لو جعلنا هذه العصا تهتز حول محور يمر من هذه النهاية هذا يعني أن تواتر الاهتزاز الحر لهذه العصا سيساوي 2,5HZ. ماهو عزم عطالة هذه العصا بالنسبة لهذه النهاية؟

الحل :

نحسب عزم العطالة بالعلاقة (1-2-15) بعد التعويض فيها بـ $T = 1/f = 0{,}40s$ و $: h = 0{,}42m$

I =

إن عزم عطالة قضيب متماثل ذي طول L بالنسبة للمحور المار من إحدى نهايتيه الشكل (1−2−13). يساوي $\overline{L} = (1/3)\ ML^2$. هل حسب ذلك سيكون طول القضيب غير المتماثل أكبر من 84cm أو أقل؟



مثال (1−2−10) :

قضيب رفيع ومستقيم طوله $L = 1,00m$ وكتلته $m = 160g$ معلق من نهايته على محور دوران.

1- ما هو دور اهتزازه الصغير ؟

2- ماهو طول النواس الرياضي الذي له نفس هذا الدور؟

الحل :

1- إن عزم عطالة قضيب رفيع بالنسبة لمحور دورانه يمر من إحدى نهايتيه كما في الشكل (13-2-1) يساوي $I = (1/3)\ mL^2$.

وبالأخذ بعين الاعتبار أن مركز كتلة القضيب يقع في منتصفه هذا يعني أن $h = L/2$.

فيكون دور اهتزازه مساوٍ:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} =$$

2- إن طول النواس الرياضي الذي يمتلك نفس دور الاهتزاز يساوي :

ويكون هذا الطول من أجل قضيب متماثل مثبت من إحدى نهايتيه يساوي $L = (2/3)L$ وفي حالتنا هذه يكون $L = 0,67m$.

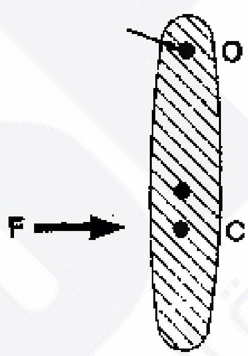
إن النقطة من النواس الفيزيائي التي تقع على مسافة $L = I/mh$ من نقطة التعليق O حتى الخط الذي يعبر من مركز الكتلة تسمى بمركز الاهتزاز (وهي النقطة Cعلى الشكل (1-2-13)).

إن مركز اهتزاز قضيب متجانس طوله l تقع على المسافة $L = (2/3)l$ بدء من محور الدوران. كما رأينا في المثال الأخير. إن دور اهتزاز النواس الرياضي ذي الطول $L=I/mh$

يماثل دور اهتزاز النواس الفيزيائي. وبكلمات أخرى نقول إن النواس الفيزيائي يهتز بنفس الدور كما لو أن كتلة مركزه مجمعة في مركز كتلته.

إن مركز الاهتزاز يمتلك خاصتان هامتان اضافيتان :

1) إذا كانت C هي عبارة عن مركز الاهتزاز بالنسبة لمحور الدوران O فإن O تعتبر مركزاً للدوران بالنسبة للمحور المار من C إضافة إلى ذلك إن دور الاهتزاز في كلتا الحالتين متساوي.
2) إذا قمنا بضرب الجسم المعلق في مستوي الاهتزاز وبصورة مستوية في نقطة الاهتزاز الشكل (1−2−13)عند ذلك في نقطة التعليق لايوجد أي قوة رد فعل. إن المثال الهام على هذه الخاصة (الثانية) يمكن اقتباسه من لعبة البيسبول.



الشكل(1-2-14) الج يه قوة
ضعيفة F والمتجهة تزاز

لو ضربنا بالمضرب على الطابة سيشعر اللاعب بحرق على أصابعه إذا لم تصب الضربة مركز الاهتزاز. ويسمى مركز الاهتزاز أيضاً بمركز الضرب. وفي المسائل الواردة في نهاية هذه الفقرة نطلب من القارئ إيجاد كلتا هاتين الحالتين. نلاحظ أن مركز الاهتزاز يتعلق بمكان نقطة التعليق. ومن الهام ذكره أنه عند المشي إن الرجل أيضاً تتحرك كنواس فيزيائي عند كل خطوة, وتدرس الرجل كنواس ينجز نصف دور من الاهتزاز. عند المشي ننقل الأرجل بصورة موافقة لتواتر اهتزازهما الخاص , ومن أجل تسريع أو تبطيء المشي أو البدء بالركض من الضروري

تطبيق قوة إضافية من جانب العضلات. غير أنه بنفس الوقت يمكن العبور لمسافة كبيرة (وبتعب أقل) إذا تحركنا بخطوات كبيرة مع الحفاظ على نفس تواتر الاهتزاز الخاص (حيث أن دور الاهتزاز لا يتعلق تقريباً بالسعة).

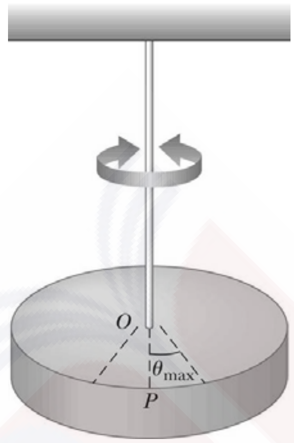
1-2-7- نواس الفتل Torsional pendulum:

وهو جسم صلب معلق بسلك مثبت من الأعلى بنقطة ثابتة. عند تدوير الجسم بزاوية θ حول محور السلك الشاقولي فإن هذا السلك سيطبق على الجسم قوة ارجاع تتناسب طردياً مع زاوية الفتل θ ويكون العزم الدوراني τ هو :

حيث K هو ثابت فتل السلك torsion constant وهو يتعلق بنوع مادة السلك. وبتطبيق قانون نيوتن الثاني للحركة الدورانية نحصل على :

ومرة أخرى فإن هذه المعادلة تمثل معادلة الحركة التوافقية البسيطة لنواس الفتل والذي يهتز بتواتر زاوي $\omega = \sqrt{K/I}$ وبدور حركة قدره :

وفي هذه الحالة لا يوجد أي قيمة لزاوية الفتل طالما أن السلك لم يفقد خواصه الفيزيائية كحد الليونة elastic limit المسموح به.



الشكل (1-2-15) نواس الفتل

1-2-8- الاهتزازات التوافقية المتخامدة(Damped oscillation):

إن الدراسة التي ناقشناها سابقاً تمثل الحالة المثالية لنظام فيزيائي يستمر في الاهتزاز إلى ما لانهاية تحت تأثير قوة واحدة هي قوة إرجاع النابض أو قوة الجاذبية ولكن في الأنظمة الحقيقية فإن قوى غير محافظة كقوة الاحتكاك تكون مؤثرة في الحركة الاهتزازية وتؤدي لتناقص سعة الحركة وتخامدها بمرور الزمن أي تناقص الطاقة الميكانيكية للجملة ونقول عن هذه الحركة بأنها متخامدة (Damped).

في الشروط الحقيقية فإن سعة اهتزاز النواس أو النابض ستتناقص بالتدريج حتى يتوقف الاهتزاز نهائياً. ففي الشكل (1−2−16) بين كيفية تخامد سعة الاهتزاز مع الزمن. مثل هذه الاهتزازات تسمى الاهتزازات التوافقية المتخامدة. إن سبب تخامدالاهتزازت يعود إلى مقاومة الهواء والاحتكاك داخل الجملة المهتزة. إن طاقة الاهتزاز تتحول بالتدريج إلى حرارة وتقل سعة الاهتزاز. إن أنواع الحركة المتخامدة كثيرة جداً نذكر منها حركة سقوط جسم في سائل حيث تتولد في السائل قوة معاكسة تعمل على تقليل سرعة الجسم , ومن الأمثلة أيضاً حركة نواس بسيط بوجود قوى احتكاك وذلك من أجل سعات اهتزاز صغيرة , حركة نواس فيزيائي (نواس مركب) في حال وجود قوى احتكاك عند الاهتزاز بزوايا صغيرة وأخيراً حالة دارة كهربائية مكونة من مكثف وملف وبوجود قوى مقاومة أومية في الدارة. ولكن إذا كانت الجمل المهتزة الحقيقية

دائماً متخامدة , هل هناك تفسير للكلام عن الجمل المهتزة التوافقية الغير متخامدة؟ حيث أن تحليل الجمل الغير متخامدة من الناحية الرياضية أسهل بكثير.

الشكل (1-2-16) الاهتزازات التوافقية المتخامدة

في الحقيقة فإن التخامد يؤدي إلى تغيير تواتر الاهتزاز, إن هذا التأثير غير كبير إذا كان التخامد قليلاً.ولندرس هذا بالتفصيل. إن القوة المؤدية للتخامد تتعلق بسرعة الحركة الاهتزازية وهي معاكسة للحركة وفي كثير من الحالات يمكن اعتبارها متناسبة طرداً مع السرعة:

حيث : b ثابت يسمى معامل التخامدdamping cofficient. وفي حالة اهتزاز الثقل في نهاية النابض فإن قوة الارجاع من قبل النابض تساوي : $F_x = -Kx$ وحسب القانون الثاني لنيوتن : $F = ma$ يمكن أن نكتب :

$\sum$

لننقل كافة العناصر إلى الطرف اليساري ونعوض بـ $\upsilon_x = dx/dt$ و$a_x = d^2x/dt^2$لنحصل على معادلة الحركة التالية وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt}$$

بفرض أن $\gamma = b/2m$ و $\omega = k/m$.حل المعادلة يتطلب مهارات مهنية من الرياضيات قد تكون جديدة على الطالب في هذه المرحلة. يتم حل هذه المعادلة التفاضلية بإثبات وتحقيق وجود حلين خاصين يحققان المعادلة السابقة في حين يشكل الترتيب الخطي لهذين الحلين الخاصين

الحل العام للمعادلة التفاضلية. أي بفرض x_1 و x_2 حلين خاصين مختلفين للمعادلة فإن الحل العام :

حيث c_1 و c_2 هما ثوابت تتعلق بالشروط البدائية للظاهرة.

إن المعادلة السابقة تقبل حلولاً خاصة من الشكل $x = e^{rt}$حيث r ثابت يتعلق بالمتغيرات الفيزيائية للحركة السابقة γ و ωأي أنه يتعلق بثوابت الظاهرة المدروسة.

وللتأكد من أن الحل السابق نشتق الحل الخاص ونعوض في معادلة الظاهرة :

$$\frac{dx}{dt} = r$$

بالتبديل في المعادلة نجد :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt}$$

$$r^2e^{rt}$$

والمعادلة الأخيرة نفرض أن الجداء معدوم. الحد الأول $e^{rt} \neq 0$ وهو شرط وجود الحركة وبالتالي فإن الحد الآخر هو الحد الذي يحدد شروط الحركة وظروفها بحسب الحلول الرياضية المقبولة فيزيائياً للحركة.

أي : $r^2 + 2\gamma r + \omega^2$ وهي معادلة من الدرجة الثانية يمكن أن يكون لها حلان أو حل مضاعف أو حل عقدي وهذا ما يحدده قيمة المقدار $\Delta = 4(\gamma^2 - \omega^2)$ ونحصل على التالي:

$$r_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma}$$

حلان للمعادلة.

$r_1 = r_2$

$\Delta < 0 \quad \Leftarrow$ الحل عقدي وسنوجد صيغة الحل لاحقاً.

ولنناقش الحالات الثلاث تفصيلياً:

1− من أجل قيم المميز الموجبة :

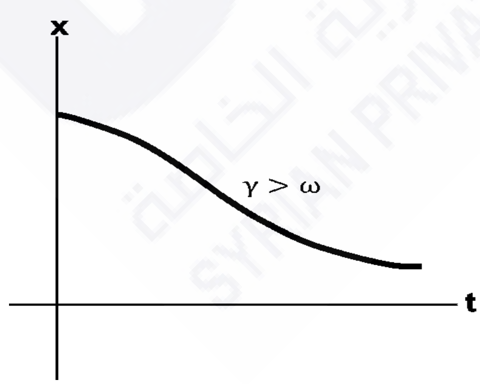
$\Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{2m} = \gamma > \omega$ وفي هذه الحالة لدينا :

والحلول الخاصة المختلفة ستكون: $x_2 = e^{r_2 t}$ و $x_1 = e^{r_1 t}$

أما الحل العام فهو :

$$x = c_1 e$$

وهذه الحالة تمثل مجموع تابعين أسيين متناقصين وهو تابع أسي متناقص من طرف واحد بالنسبة للحركة فالجسم يتخامد بسرعة وقبل وصوله إلى موضع التوازن ويمثله التابع :



الشكل (1-2-17) يمثل حل المعادلة التفاضلية من أجل $\Delta > 0$ وهو تابع متناقص أسياً

تسمى هذه الحالة بـ حالة فوق التخامد over damped وفي هذه الحالة تؤول طاقة المهتز للصغر وتناقص الطاقة الميكانيكية يتحول إلى طاقة داخلية للجسم والوسط المحيط بالمهتز.

2- إذا كان المميز معدوم أي : $\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = \omega$

وفي هذه الحالة كما ذكرنا سابقاً يكون للمعادلة جذر مضاعف حقيقي :

والحلين السابقين سيمثلان حلاً خاصاً واحداً : $x_1 = x_2 = e^{-\gamma t}$

وعندها سنحتاج إلى حل خاص آخر ليمثل مع الحل السابق حلاً عاماً للمعادلة. يبرهن أن المعادلة السابقة تقبل حلاً عاماً من الشكل :

$$x = u(t)e^{rt}$$

حيث r هو الثابت المتعلق بـ γ و ω و $u(t)$ هو تابع متعلق بالزمن ومستمر وقابل للاشتقاق وللتأكد من أن هذا الحل هو حل للمعادلة نشتق هذا الحل ونعوض في المعادلة وذلك من أجل ايجاد شكل هذا التابع العام $u(t)$.

$$\frac{dx}{dt} = u'(t)e^{rt} + u($$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = u''(t)e^{rt} + 2$$

بالتعويض في المعادلة$(18-2-1)$نجد:

$$u''(t)e^{rt} + 2u'(t)re$$

$$+\omega^2 u(t)e^{rt} = 0$$

$$e^{rt}\{u''(t) + u'(t)[$$

المعادلة الأخيرة تبين شرط تحقق أن مجموع المقادير معدوم أي :

$$u'(t)$$

من شروط اختيار التابع $u(t)$ بأنه مستمر وقابل للاشتقاق.

$e^{rt} \neq 0$ وهو شرط الحل الأساسي وبالتالي حتى يتحقق المعادلة يجب أن يكون :

$r^2 + 2r\gamma + \omega^2 = 0$ وهو شرط الحل $\Delta = 0$.

$2r + 2\gamma = 0$ وهذا محقق $\Delta = 0 \iff \gamma = \omega$.

$u''(t) = 0$ ومنه نكامل هذا المقدار لإيجاد قيم التابع $u(t)$.

$u'(t) =$

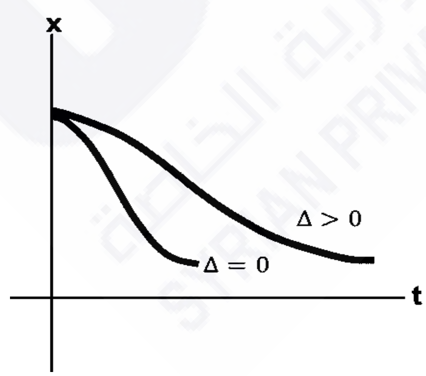
حيث c_2 , c_1 ثوابت تتعلق بشروط البدء.

وبالتالي يكون الحل العام هو :

$x = (c$

هذا الحل يظهر أن التابع متناقص أسياً وأيضاً من طرف واحد دون أن يختار موضع التوازن ولكن بشكل أسرع من الحالة السابقة $(\Delta > 0)$ وذلك لأن المقدار :

وهو ما يظهره الشكل $(1-2-18)$



الشكل (1-2-18) مقارنة بين الحلين $\Delta > 0$ و $\Delta = 0$ وهما تابعين متناقصين أسياً
وهو ينتهي للصفر بسرعة أكبر من أجل $\Delta = 0$

تسمى الحالة$\Delta = 0$حالة التخامد الحرج Critically damped.

وهذه الحالة فيزيائياً تماثل الحالة السابقة ($\Delta > 0$) من حيث الطاقة وتحولها إلى طاقة داخلية للمهتز والوسط المحيط.

3- الحالة الأخيرة $\Delta < 0$ وفي هذه الحالة تكون جذور المعادلة المميزة عقدية مثلثية لها الشكل:

r_1

r_2

حيث : $i = \sqrt{-1}$. والحلول الخاصة في هذه الحالة هي :

في حين أن الحل العام هو :

$x = c_1 e^{(-}$

نعرف المقدار : $\omega_d = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ ب تواتر الحركة الاهتزازية المتخامدة. وعندها تصبح المعادلة بالشكل :

$x =$

وباستخدام علاقات أويلر (Euler) :

$e^{\pm i\theta} = \cos(\theta) \pm$

تصبح معادلة الحل العام بالشكل :

$$x = e^{-\gamma t}[(c_1 +$$

$$x = e^{-\gamma$$

حيث :

$$c_1 = 1/2$$

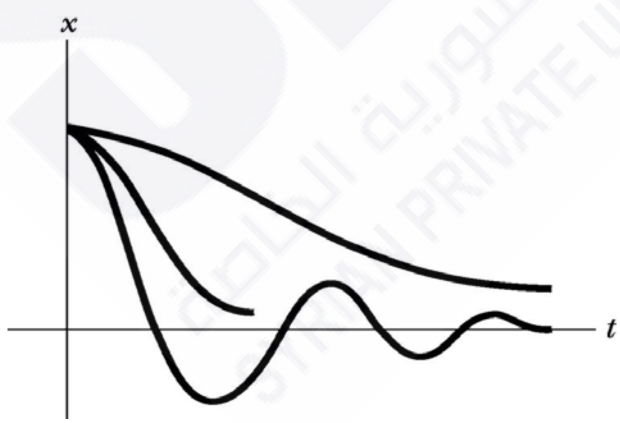
وهذه الثوابت c_1 و c_2 و k_1 و k_2 تتعلق بالشروط البدائية للظاهرة ويصبح الحل بالاستفادة من علم المثلثات :

x

أو

x

حيث Aو φ ثوابت تتعلق أيضاً بشروط البدء. أما المعادلة الأخيرة فهي تمثل الحل العام والذي يمثل بالمنحني المعين بالشكل (1−2−19) والذي يبين الطبيعة الاهتزازية المتخامدة من الطرفين للحركة والتي يبينها جزئي الحل العام السابق.

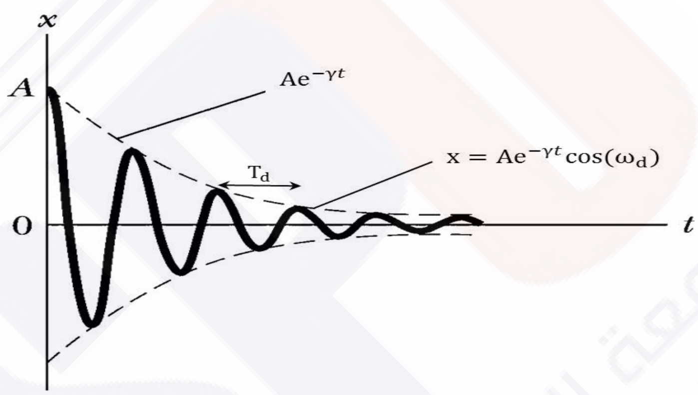


الشكل (1-2-19) يمثل الحلول الثلاث للمعادلة الاهتزازية التفاضلية حتى الدرجة الثانية وهو يبين الحل المتخامد المهتز العقدي من أجل $\Delta < 0$

هذه الحالة تسمى حالة تحت حد الاخماد Under damped.

يكون تواتر حركة الجسم في هذه الحالة مختلفاً عن الحالتين السابقتين , ففي هذه الحالة إن دور الحركة $T_d = {2\pi}/{\omega_d}$ سيكون أكبر أي أن الحركة تتم بتواتر زاوي ω_d أصغر من $\omega = \sqrt{{k}/{m}}$ لأن $\omega_d < \omega^2 - \gamma^2$.

نسمي T_d نسبة الدور وهو أكبر من $T = {2\pi}/{\omega}$ وبالتالي فالحركة أبطأ فيزيائياً في حالة وجود قوى احتكاك ضمن وسط الاهتزاز.



الشكل (1-2-20) يمثل حل المعادلة من أجل $\Delta < 0$ ويبين نسبة الدور ومغلف الحركة المتناقص أسياً (الخط المتقطع) وتناقص وسعة الحركة الأساسية

سؤال للتفكير ؟؟؟

نظام تعليق السيارة يتكون من هزازات لامتصاص الصدمات كما في الشكل $(1-2-20)$ فإذا كنت مهندس ميكانيك فهل تصمم نظام التعليق بحيث يحقق تخامد حرج أو فوق الحرج أو تحت الحرج, ناقش الحالات.

يمكن كتابة عبارة الطاقة الكلية في حالة التخامد تحت الحرج $(\Delta < 0)$ وذلك من الصيغة التالية:

E_c الطاقة الحركية و E_pالطاقة الكامنة.

وحيث أن: $\nu = dx/dt$ و $m = k/\omega^2$ و $x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_d t + \varphi)$

$$\nu = \frac{dx}{dt} = A\gamma e^{-\gamma t}$$

بالتعويض نجد :

$$E_t$$

وذلك لأن :

$$E_t = \frac{1}{2}kA$$

وباستخدام العلاقة :

$$\int_0^T \sin() = a\sin\big(2($$

أي أن الطاقة متناقصة أسياً.

نعرف معامل الجودة للظواهر الاهتزازية المتخامدة بـ المقدار : $Q = \omega/2\gamma$.

حيث تأخذ γ القيم بين $\omega, 0$ و Q بالتالي تقع ضمن المجال $[\infty\ ,\ 1/2]$.

نعرف أيضاً التناقص اللوغاريتمي للحركة الاهتزازية المتخامدة بالعلاقة :

$$\delta = \ln \frac{}{x(}$$

تمرين :

جسم كتلته $m = 5kg$ معلق بنابض مرن معامل صلابته k ويخضع لقوة ارجاع f_r وقوة احتكاك f_d ويعطى $b = 2\sqrt{2}\ USI$ والمطلوب :

1− بين واحدات كل من k و b في الجملة الدولية.

2− اكتب معادلات الحركة وبين حلولها ونوع الحركة من أجل القيم التالية:

مثال (1−2−11) :

تتألف دارة كهربائية من مدخرة قوتها المحركة $12,00v$ ومكثفة سعتها $10pf$ وملف معامل تحريضه $L = 6Mh$ نشحن المكثفة حتى تمام الشحن المطلوب :

1− أرسم دارة هزاز توافقي باستخدام العناصر السابقة واكتب المعادلة التفاضلية لشحنة المكثفة واحسب دور الحركة T.

2− بفرض ان مقاومة أوجيه R أضيفت إلى الدارة السابقة والمطلوب :

أ) ارسم الدارة الجديدة واكتب المعادلة التفاضلية لشحنة المكثفة.

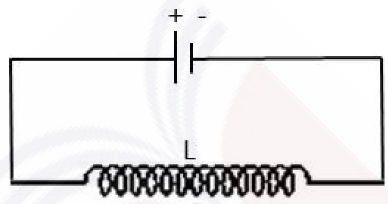
ب) أحسب قيمة R_c الموافقة لحالة تخامد حرج لشحنة المكثفة.

ج) أحسب نسبة الدور T_d للهزاز المتخامد من أجل قيمة مقاومة أوجيه $R = 50k\Omega$.

د) أحسب معامل التخامدγ ومعامل الجودة والتناقص اللوغاريتمي.

الحل :

-1



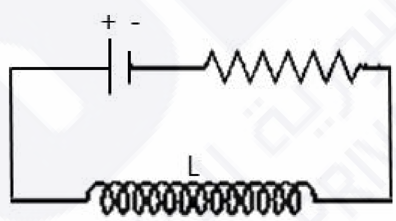
في حال عدم وجود مقاومة أومية فالشحنات الكهربائية تمثلها المعادلة :

$$\frac{d^2q}{dt^2}$$

أما دور الحركة :

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{Lc}}} = \frac{\quad}{\sqrt{(6\times}}$$

-2



عند إضافة المقاومة الأومية فإن الدارة الكهربائية المكافئة لحركة اهتزازية متخامدة تعطى باستخدام قانون كيرشوف بـ :

$\sum v$:

حيث أن :

$$v_L = L\frac{dI}{dt} = \mathrm{I}$$

$$R_c = 2\sqrt{\;}$$

2- لحساب سعة الدور من أجل $R_c = 50\ k\Omega$:

$$T_d = \frac{2}{\omega}$$

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{(6\times10^{-3})(10}}$$

معامل التخامد:

$$\gamma = \frac{R_c}{2L} =$$

معامل الجودة:

$$Q = \frac{\cdots}{2}$$

التناقص اللوغاريتمي :

$$\delta = \gamma T_d = 4{,}17 \cdots$$

1-2-9- الاهتزازات القسرية Forced oscillation:

إن الجملة المهتزة المزاحة عن وضع توازنها تبدأ بالاهتزاز بتواترها الخاص. لقد وجدنا سابقاً في هذا الفصل العلاقة الرابطة بين التواتر الخاص للاهتزاز (أو الدور) مع متحولات الجملة من أجل الأجسام المرنة (مثل النابض) والنواس ولاحظنا أن الطاقة تتناقص نتيجة التخامد ومن الممكن أن نعوض هذا التخامد بأن نقدم عملاً لهذه الجملة تكون جهته بعكس جهة التخامد فعلى سبيل المثال يمكن جعل الأرجوحة تستمر بالاهتزاز بإعطائها دفعة صغيرة وتكون سعة الاهتزاز ثابتة إذا كانت الطاقة المعطاة في كل دورة تساوي مقدار النقص في الطاقة المفقودة نتيجة التخامد. في كثير من الحالات, إن الجملة لاتهتز ببساطة لوحدها وإنما تتأثر بتأثير قوى خارجية والتي تتغير أيضاً بتواتر معين. على سبيل المثال يمكننا دفع الثقل الموصول في النابض كما في الشكل (1-2-1) وبتواتر $\omega = 2\pi f$. وعندئذ يبدأ الثقل بالاهتزاز بتواتر القوة الخارجية ω_e, حتى لو أن هذا التواتر لا يتطابق مع تواتر الاهتزاز الخاص للنابض والذي نرمز له بـ ω_o :

وبصورة عامة يوجد أشكال كثيرة للاهتزازات القسرية التوافقية وبعضاً منها سنناقشه في هذا الفصل وفي فصول لاحقة دارة تسلسلية مكونة من وشيعة ومكثفة ومقاومة ومولدة كهربائية متناوبة والأمواج الكهرطيسية والالكترونات الحرة في هوائي جهاز الاستقبال هي أمثلة على