المحاضرة الثالثة

الفصل الثالث

التوّزعات الاحتمالية ذات الصلة

Probability Distribution

1.3) المفاهيم والمبادئ الأساسية لعلم الاحتمال وخصائصه:

1.1.3: الظواهر العشوائية ونظرية الاحتمالات:

إن علم الاحتمال هو علم دراسة الظواهر العشوائية ، إذ يمكن أن نعدّ كل ما يحيط بحياتنا اليومية ظواهر عشوائية، لأننا لا نتوقع ماذا سيحدث لنا أو معنا في لحظة معينة من كل يوم آت . فالظاهرة العشوائية تعرّف أنها ظاهرة اعتيادية تتميزّ بخاصة كون مشاهدتها المسجلة عند ظروف معيّنة لا تؤدي دائماً إلى نتيجة المشاهدة نفسها، ولكنها بطريقة ما تؤدي إلى انتظام إحصائي معين ، أي نعني بوجود أعداد من الصفر إلى الواحد، تمثل التكرار النسبي للمشاهدات، إذ إن هذا التكرار النسبي لمشاهدة حدوث حادثة معينة في الظاهرة سيقترب كما سنرى من احتمال وقوع هذه الحادثة.

وعلم الاحتمال هو علم دراسة الظواهر العشوائية فكرياً وتحليلياً في جميع مجالات ظهورها. والحساب الاحتمالي هو النظرية التي تشكل النموذج الرياضي للظواهر التي تتصف بالانتظام الإحصائي. وهناك العديد من الأمثلة على الظواهر العشوائية مثل ظاهرة حوادث السير وظاهرة سقوط المطر وظاهرة توارد مكالمات

هاتفية لمركز هاتفي وظاهرة تعطل الأجهزة وظاهرة حركة الموانئ والمطارات و تقلبات الأسعار ونمو النباتات...إلخ. و يكون الهدف من نظرية الاحتمالات هو بناء مسألة رياضية تصف وتحلل هذه الظواهر ومشاهدتها.

إن علم الاحتمال يرتكز على المفاهيم الأساسية الثلاثة الآتية: التجربة – وجبر الحوادث– و حساب الاحتمال.

2.1.3: التجربة والتجربة العشوائية:

نواجه في معظم ميادين النشاط العلمي والحياة اليومية تجارب ومشاهدات وظواهر يمكن أن تتكرر عدداً كبيراً من المرات تحت ظروف مشابهة ، وفي كل مرة نهتم بنتائج هذه التجارب والمشاهدات والتي يمكن أن تكون كمية ، فنسجل نتيجة كل مشاهدة على شكل عدد. أو قد تأخذ شكلاً كيفياً (وصفياً) فنسجل صفة معينة كأن نلحظ مثلاً لوناً أو نسجل وقوع أو عدم وقوع حادثة أو ظاهرة معينة متصلة بالتجربة.

وتعرّف التجربة بأنها كل عملية تؤدي إلى ملاحظة "مشاهدة" أو قياس.

ويهتم علم الاحتمال بالتجارب العشوائية ، حيث تعرّف التجربة العشوائية بأنها تجربة تتحكم في مشاهداتها المصادفة والتخمين . وهناك أمثلة على التجارب العشوائية منها:

- إلقاء قطع من النقود أو أحجار النرد وملاحظة النتائج الحاصلة.
- اختيار عنصر من مجموعة العناصر.
- قياس درجة الحرارة في مكان وزمان معّين عدة مرات.
- مراقبة تقلبات الأسعار ومشاهدة تواترات أسعار مادة معينة.

- توزيع مجموعة من الكرات على مجموعة من الصناديق.
- سحب ورقة أو عدة أوراق من ورق اللعب (52 ورقة).
- تواترات المكالمات الهاتفية في ساعة معينة في مركز هاتفي.
- قياس الطول والوزن لمجموعة من الأشخاص لهم العمر نفسه والجنس نفسه ، إذ نجد هنا الملاحظات على شكل زوج مرتب (X ، Y) إذ X يمثل الطول و Y يمثل الوزن.
- أخذ عينة من الإنتاج اليومي لمصنع من الألمنيوم وقياس القساوة والمقاومة ونسبة الكربون في كل قطعة فعندئذٍ النتائج ستكون على شكل ثلاثيات (X , Y , Z) على الترتيب.
- متابعة جنس المولود حديثاً في منطقة معينة فسنحصل على نتيجة وصفية ذكر أو أنثى ، وهنا يمكن أن نعطي النتيجة الرقم (1) إذا كان ذكراً والرقم (0) إذا كان المولود أنثى.
- ومن خلال الأمثلة السابقة نلحظ أن لكل تجربة مجموعة من النتائج الممكنة التي تحددها طبيعة الدراسة التي تستهدفها التجربة ، إذ سنرمز لمجموعة النتائج بـ Ω ندعوها بفضاء العينة وكل نتيجة ممكنة للتجربة سندعوها بنقطة العينة ولعدد النتائج (عدد نقاط العينة في فضاء العينة) بـ $|\Omega|$ وندعوها بعدة فضاء العينة Ω .
- ونعرف الحادث بأنه مجموعة جزئية من فضاء العينة إذا كانت Ω تمثل مجموعة منتهية. ونسمي الحادث الذي يحوي نقطة واحدة من نقاط العينة الحادث الابتدائي.

3.1.3: النماذج الأساسية في تحديد فضاء العينة Ω وعدتّه $|\Omega|$:

1.3.1.3: بالحساب المباشر:

– مثال تجربة إلقاء حجر النرد مرة واحدة يكون فضاء العينة

$|\Omega| = 6$ و $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

مثال ولادة طفل: فإذا رمزنا بـ B للذكر و G للأنثى فإن $\Omega = \{B, G\}$ و $2 = |\Omega|$

مثال إلقاء قطعة نقد :فإذا رمزنا بـ T للكتابة و H للصورة فإن $\Omega = \{T, H\}$ و $2 = |\Omega|$

2.3.1.3: باعتماد طرائق العد:

1- قاعدة الـ m X n : إذا أمكن استكمال مرحلة أولى من عمل معين بـ m طريقة، ومن أجل كل من هذه الطرائق أمكن لمرحلة ثانية أن تتم بـ n طريقة، فالعدد الكلي للأشكال المختلفة لاستكمال العمل بمرحلتين هو **m X n** طريقة و يدعى ذلك أيضاً بالمبدأ الأساسي للعد.

مثال (1.3): يمكن لشخص يعمل في بلد معين أن يصل لأقاربه براً و جواً وبحراً ومن بعد يمكن أن يكمل سفره لأهله براً أو جواً . عندئذ يمكن لهذا الشخص أن يصل لأهله بعدد من الطرق المختلفة يساوي:

$$|\Omega| = m \times n = 3 \times 2 = 6$$

2– تعميم قاعدة الـ m X n : يمكن تصميم هذه القاعدة ، وذلك من أجل عمل يتضمن K من المراحل المتتالية، حيث نفرض أنه يمكن إتمام المرحلة الأولى بـ

n_1 طريقة و المرحلة الثانية n_2 طريقة ، ....، والمرحلة الـ K بـ n_k طريقة ، فيكون عدد الطرائق المختلفة لإتمام العمل بجميع مراحله هو :

$$|\Omega| = n_1 \times n_2 \times \dots \dots . . n_k$$

مثال (2.3): بكم طريقة يمكن تصنيف مجموعة من الأشخاص ، وذلك حسب حالتهم المدنية وعددها (3) و حسب مهنهم وعددها (20) وحسب جنسهم وعدده (2) وحسب مكان إقامتهم وعدده (8) وحسب مؤهلهم العلمي وعدده (6) .

الحل: إن عدد الطرائق المختلفة لتصنيف مجموعة هذه الأشخاص يكون:

$$|\Omega| = 3 \times 20 \times 2 \times 8 \times 6 = 5760$$

3- حالة خاصة: إذا كان لدينا تجربة مجموعة نتائجها Ω_1 وعدتها N ، وكررنا هذه التجربة n مرة وبشكل مستقل في كل مرة عن المرات الأخرى. عندئذ عدّة فضاء العينة الناتج يكون:

$$|\Omega| = |\Omega_1|^{\mathrm{n}} = N^n$$

مثال (3.3): تجربة دراسة توزع الذكور لدى أسرة تملك ثلاثة أطفال.

لدينا هنا : $|\Omega| = 2^3 = 8$ وفضاء العينة يكون:

$$\Omega = \{BBB, BBG, BGB, GBB, GGB, GBG, BGG, GGG\}$$

<u>ملاحظة:</u> في حالة تجربة ثنائية (لها ناتجان فقط) وكررنا وبشكل مستقل هذه التجربة n مرة وبفرض Ω فضاء العينة لكل النتائج الممكنة عندئذ: $|\Omega| = 2^n$

4- **العينات المرتبة** : إذا كانت A مجموعة غير خالية من العناصر المتمايزة وكان $r \in IN^*$ فإن كل عنصر $(X_1, X_2, \dots \dots , X_r)$ من A^r يدعى في مفهوم علم الاحتمال والاحصاء بعينة مرتبة من الحجم r مأخوذة من المجموعة A ويكون عدد العينات المرتبة هذه يساوي :

- في حالة $|A| = n$ والسحب r مرة متتالية مع الإعادة (أي يعاد العنصر الذي يتم سحبه):

$$|\Omega| = |A|^r = n^r$$

في حالة $|A| = n$ والسحب r مرة متتالية (r≤n) بدون إعادة (أي يحتفظ بالعنصر الذي يتم سحبه):

$$|\Omega| = n(n-1)(n-2)\dots\dots\dots(n-r+2)(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = P_r^n$$

والعناصر هنا تكون مختلفة ، وندعوه نسقاً من الحجم r مأخوذاً من A حيث :

$r \le |A|$ و $|\Omega|$ أعلاه يكون عدد الأنساق من الحجم r والممكن تشكيلها من A.

- **المتبادلات:** يدعى ترتيب r من الأشياء المتمايزة (متبادلة). إذ نفرض أنه لدينا n شيء متمايز ونريد اختيار r شيئاً منها (r≤n) تم ترتيبها في متبادلة فعندئذ يكون عدد الطرائق المختلفة للقيام بهذا الترتيب هو :

$$P_r^n = n(n-1)(n-2)\dots\dots\dots(n-r+2)(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad , (r \le n)$$

وعندما يكون r=n أي نريد ترتيب عناصر المجموعة بأكملها فإن عدد الطرائق المختلفة لإنجاز ذلك: $P_r^n = n(n-1)(n-2)\dots\dots\dots 3.2.1 = n!$.

مثال (4.3): بكم طريقة يمكن أن نوزع n كرة على n صندوق؟

الحل:

$$|\Omega| = n^n$$

مثال(5.3):

لدينا مرجع مؤلف من ستة أجزاء نريد ترتيبه على أحد رفوف مكتبة لدينا. ولكن لا يتوفر لنا سوى أربعة أماكن. فبكم طريقة مختلفة يمكننا شغل هذه الأماكن الأربعة المتوفرة . بأربعة أجزاء نختارها من الأجزاء الستة؟

الحل:

إن عدد الطرائق المختلفة لشغل الأماكن الأربعة هو عدد متبادلات لستة أشياء مأخوذ أربعة منها في وقت واحد أي P_4^6 ومنه :

$$P_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6X5X4X3X2!}{2!} = 360$$

- **<u>المتوافقات:</u>** إن العديد من المواقف في العد تقتضي ألا نأخذ ترتيب العناصر في الأنساق . فإذا كان لدينا مجموعة A من العناصر المتمايزة عدتها n وأردنا اختيار مجموعة جزئية مؤلفة من r عنصراً (r≤n) ، فنقول عندئذ إن ذلك يدعى بمتوافقة حجمها r مأخوذة من A ونرمز لها بـ C_r^n أو $\binom{n}{r}$. فمن أجل $r \neq 0$ يكون عدد المتوافقات من الحجم r والمأخوذة من A (التي عدتها n):

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

<u>ملاحظات :</u>

1. اصطلاحاً نضع : $0! = 1$ ، كما يكون $1! = 1$

2. بسهولة نجد : $\binom{n}{0} = 1; \binom{n}{n} = 1$

$$\binom{n}{1} = n \; ; \; \binom{n}{n-1} = n$$

مثال (6.3):

إن عدد طرائق اختيار ثلاثة كتب من 7 كتب لترتيبها على رف يكون:

$$C_r^n = C_3^7 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7X6X5X4!}{(3X2)(4!)} = 35$$

أي في هذا المثال يهمنا الكتب التي تم اختيارها ولا تهمنا طريقة الترتيب على الرف.

- نموذج أساسي مع مثال: توزيع r كرة (متمايزة أو غير متمايزة) على n صندوقاً:

إن توزيع r كرة متمايزة على n صندوقاً يعطى بـ :

$$|\Omega| = n^r = n\,Xn \ldots \ldots . Xn$$

<u>**ملاحظة:**</u> يعود لنموذج توزيع r كرة متمايزة على n صندوقاً، العديد من التجارب العشوائية ومنها مثلاً: توزيع أيام الميلاد لمجموعة من الأشخاص عددها r على أيام السنة n=365 .

- دراسة توزيع مجموعة من حوادث السير r على أيام الأسبوع n=7.
- تصنيف مجموعة من الأشخاص r وفقاً للعمر والمهنة والجنس .
- توزيع حبيبات الضوء على خلايا الشبكية.
- توزيع الأخطاء المطبعية على صفحات كتاب معين .... إلخ.

في حالة كون الكرات غير متمايزة فإن عدد الطرق المختلفة لتوزيع r كرة غير متمايزة على n صندوقاً يعطى بالعلاقة الآتية: $|\Omega| = \binom{n+r-1}{r}$

4.1.3 الجبر والجبر التام وبعض الخواص:

تعريف :إذا كانت Ω مجموعة مفروضة ، وكان F صفاً غير خال من أجزاء Ω أي $F \subseteq P(\Omega)$ نقول عن F إنه جبر على Ω إذا تحققت الشروط الآتية:

1) $\Omega \in F$; **2)** $A \in F \Rightarrow \acute{A} \in F$; **3)** $A, B \in F \Rightarrow A \cup B \in F$

تعريف: إذا كان F جبراً على Ω وحقق F الشرط التالي (مغلق بالنسبة للاتحاد المعدود):

$$A_1, A_2, \dots \dots, A_n, \dots \dots \in F \Rightarrow \bigcup_{i \geq 1} A_i \in F$$

عندئذ نقول إن F يشكل جبراً تاماً أو $\sigma-$ جبر على Ω

نتائج :

1) إذا كان F جبراً على Ω فإن :

1 . $\emptyset \in F$.

2 . $A \setminus B \in F \Longrightarrow A, B \in F$ (مغلق بالنسبة للفرق).

3 . $A \triangle B \in F \Longrightarrow A,B \in F$ (مغلق بالنسبة للفرق التناظري).

4 . F مغلق النسبة للاتحاد المنتهي.

5 . F مغلق بالنسبة للتقاطع المنتهي.

6 . تقاطع الجبور هو جبر.

2) إذا كانت F حبراً تاماً على Ω فإنه بالإضافة للنتائج السابقة نجد أن :

1. F مغلق بالنسبة للتقاطع المعدود.

2. كل جبر تام هو جبر والعكس غير صحيح.

3. كل جبر منته هو جبر تام.

4. تقاطع الجبور التامة هو جبر تام.

3) إذا كان F صفا غير خال من أجزاء Ω ، فإنه يوجد جبر (جبر تام): $\sigma(F)$ يحوي F و محتوى في أي جبر (جبر تام) يحوي F .

<u>تعريف</u>: إن الجبر (الجبر التام) $\sigma(F)$ هو الجبر الذي يولده F (أو الجبر التام الذي يولده F) .

<u>تعريف</u>: إن الجبر التام الذي يولده صف المجالات المحدودة على R يدعى جبر بوريل ونرمز له بـ R_1 وكل مجموعة منتمية إلى R_1 تدعى مجموعة بوريلية. وبالطريقة نفسها نعرف جبر بوريل R^{n} و مجموعاتها البوريلية ونرمز له بـ R_n.

<u>ملاحظة :</u>

يؤدّي جبر بوريل دوراً أساسياً في نظرية الاحتمالات ؛ لأن الدراسات العددية فيها تستخدم المجالات أساساً لها.

<u>أمثلة :</u>

- $P = (\Omega)$ هو جبر وجبر تام على Ω .
- $F = \{ \emptyset, \Omega\}$ هو جبر وجبر تام على Ω
- المجالات المفتوحة من R ليست جبراً ولا جبراً تاماً على Ω.

- إذا كانت : $\Omega = \{1,2,3,4\}$ وأخذنا الصف :

$$F = \{\emptyset , \{1\}, \{4\}, \{2,3\}, \{1,4\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$$

لأنه يحقق الشروط الأربعة في التعريف هو جبر تام على F . Ω

<u>تعريف:</u>

إذا كانت Ω مجموعة غير خالية و F جبراً تاماً من أجزائها فإن الثنائية (Ω, F) تدعى فضاءً قيوساً. وندعو كل عنصر من عناصر F مجموعة قيوسة.

<u>نتيجة:</u> إن Ω , Ø مجموعات قيوسة.

<u>تعريف:</u> ليكن (Ω, F) فضاءً قيوساً، نقول عن دالة $\mu : F \to \overline{R_+}$: إنها تمثل قياساً على F إذا حققت ما يأتي:

1) $\mu(\emptyset) = 0$
2) $\forall A_1, A_2 \ldots\ldots A_i \in \boldsymbol{F}\ ;\ \forall_{\boldsymbol{i}} \neq j : A_i \cap A_j = \Phi$:
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{A_i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

<u>تعريف:</u> ندعو الثلاثية (Ω ، F , μ) بفضاء القياس μ.

5.1.3 جبر الأحداث:

<u>1) تعريف</u> : إذا كانت Ω مجموعة نتائج تجربة مفروضة وكانت Ω منهية أو معدودة. فإن أي مجموعة جزئية B من Ω تدعى حدثاً متعلقاً بهذه التجربة.

<u>2) نتيجة:</u> إن مجموعة الأحداث المتعلقة بالتجربة تكون $P(\Omega)$ وهي كما نعلم جبر تام مغلقة جبرياً بالنسبة للعمليات المنطقية المنتهية أو المعدودة.

3) **<u>حالة عامة:</u>** إذا كانت Ω غير منتهية وغير معدودة فإننا تقبل الأحداث المتعلقة بالتجربة تشكل جبراً تاماً على Ω ونرمز له بـ F ، ونسميه جبر الأحداث، وليس من الضروري أن يساوي $P\left(\Omega\right)$.

4) **<u>مسلمات احتمالية:</u>** من أجل Ω مجموعة نتائج تجربة عشوائية فإن قولنا A حدث متعلق بالتجربة Ω يكافئ قولنا إن $A \in F$ حيث F جبر الأحداث على Ω.

وكذلك من أجل $A \in F$ يكون لدينا : ($\omega \in A \Leftarrow$ الحدث A قد وقع) وقولنا ($\omega \notin A \Leftarrow$ الحدث A لم يقع).

ونذكر بأن المجموعات الجزئية الأحادية من Ω هي أحداث ، وتدعى بالأحداث الابتدائية.

5) **<u>نتيجة:</u>** إن تطبيق العمليات المنطقية على جبر الأحداث يعطي أحداثا؛ لأن جبر الأحداث هو جبر تام ، والجبر التام مغلق بالنسبة للعمليات المنطقية.

6) **<u>بعض الحوادث الشهيرة: ليكن لدينا الفضاء المقيس (Ω,F) .</u>**

<u>الأحداث الشهيرة هي:</u>

- **الحدث الأكيد:** وهو Ω.

- **الحدث المستحيل:** وهو Ø.

- **اتحاد الأحداث:** من أجل أي حدثين A,B من F فإن $A \cup B \in F$ (لأن F جبر تام) و $A \cup B$.

عندئذ هو حدث يقع إذا وقع أحد الحدثين A أو B على الأقل.

ومن أجل متتالية معدودة من الأحداث $A_1, A_2 \dots\dots A_n$ من F فإن :

$\bigcup_{i\geq 1} \mathrm{A_i} \in F$ (لأن F جبر تام) ومنه $\bigcup_{i\geq 1} \mathrm{A_i}$ هو حدث يقع إذا وقع أحد الأحداث $\mathrm{A_i}$, $\mathrm{i} \geq 1$ على الأقل.

- **تقاطع الأحداث:** من أجل A,B من F فإن $A \cap B \in F$ (لأن F جبر فهو مغلق بالنسبة للتقاطع المنتهي) ، ومنه $A \cap B$ هو حدث يقع إذا وقع A **و** B معاً وبآن واحد .

وكذلك من أجل متتالية معدودة من الأحداث $(A_i)_{\mathrm{i}\geq 1}$ فإن

$\bigcap_{i\geq 1} \mathrm{A_i} \in F$ (لأن كل جبر تام فهو مغلق بالنسبة للتقاطع المعدود) . ومِنْ ثَمَّ $\bigcap_{i\geq 1} \mathrm{A_i}$ هو حدث يقع إذا وقعت الأحداث $(A_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\geq 1}$ معاً بآن واحد .

- **الأحداث المتنافية:** نقول عن الحدثين A,B من F : إنهما متنافيان إذا كان $\mathrm{A} \cap B = \emptyset$ (أي لا يمكن وقوعهما بآن واحد).

- **<u>نتيجة:</u>** من أجل متتالية من الأحداث من F والمتنافية مثنى مثنى $(A_i)_{\mathrm{i}\geq 1}$ أي:

$$\forall_{i,j} \ : \mathrm{i} \neq \mathrm{j} : \ \mathrm{A_i} \cap \ \mathrm{A_i} = \ \Phi \,; \mathrm{i}; \mathrm{j} = 1\ ,2\ , \dots ..$$
$$\left|\bigcup_{i\geq 1} A_i\right| = |\boldsymbol{A_1}| + |\boldsymbol{A_2}| + \ \dots\dots\dots + |\boldsymbol{A_n}| + \cdots ..$$

- **فرق حدثين** : من أجل A,B من F فإن A-B $\in$ F (لأن F جبر) ومِنْ ثَمَّ A-B هو حدث يقع إذا وقع A ولم يقع B أي إن A-B = A $\cap \acute{B}$.

- **الأحداث المتعاكسة:** من أجل A من F فإن $\grave{A} \in F$ حيث $\grave{A}$ يدعى بالحدث المعاكس لـ A أو الحدث المتمم لـ A بالنسبة لـ Ω و $\grave{A}$ يقع إذا لم يقع A ومنه $A \cap \acute{A} = \emptyset$ أي أن A ، $\acute{A}$ حدثان متنافيان .

- **الاحتواء:** من أجل A,B من F و $A \subseteq B$ فهذا يعني أنه إذا وقع A يقع B، ولكن العكس ليس من الضروري أن يكون صحيحاً.

- <u>**نتائج:**</u>

1. الحدث المستحيل $\emptyset$ في أي تجربة يتنافى مع كل حدث آخر.
2. الأحداث الابتدائية في تجربة هي أحداث نافية لبعضها بعضاً لدى اختلافها.

مبرهنة (1.3):(بدون إثبات):

كل حدث من جبر الأحداث مؤلف من عدد منته من العناصر يمكن وضعه بشكل وحيد كاتحاد لأحداث الابتدائية.

مبرهنة (2.3): (بدون إثبات):

عدد الحوادث من جبر أحداث منته هو دوماً من شكل قوى للعدد 2.

6.1.3 : التعاريف الأساسية للاحتمال

1.6.1.3 التعريف التقليدي للاحتمال:

إذا كنا حيال تجربة مجموعة نتائجها منتهية أي إن :

$\Omega = \{ w_1, w_2 \dots, w_n\}$ ، فيكون عندئذ $F = P(\Omega)$ هو جبر الأحداث، وإذا كنا لا نملك أي مسوِّغ لترجيح وقوع حدث ابتدائي على وقوع حدث ابتدائي آخر فإننا نعرف $P(A)$ حيث $(A \in F)$ باحتمال وقوع الحدث A وبالشكل الآتي:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{عدد عناصر } \boldsymbol{A}}{\text{عدد عناصر } \Omega}$$

فمن أجل $|A| = K$ **حيث:** $K \leq n$ **نجد أن :** $P(A) = \frac{K}{n}$

<u>2.6.1.3 التعريف الإحصائي للاحتمال :</u>

لتكن Ω فضاء عينة لتجربة عشوائية ، ولنفترض أننا كررنا هذه التجربة n مرة (حيث n كبيرة كبراً كافياً). وليكن A حدثاً متعلقاً بهذه التجربة ، وكان n(A) عدد المرات التي يقع بها الحدث A ، وليكن $V_n(A) = \frac{n(A)}{n}$ يمثل التكرار النسبي لوقوع الحدث A . فإن المتتالية $V_1(A), V_2(A) \ldots . V_n(A)$ تخضع لنوع من الانتظام الإحصائي إذ إنه من أجل **n** كبيرة كبراً كافياً ، ستتراكم التكرارات النسبية $V_n(A)$ حول عدد ثابت سندعوه تقريباً باحتمال وقوع الحادثة A أي $P(A) \approx V_n(A)$.

3.6.1.3 التعريف الرياضي للاحتمال (تعريف كولموغوروف):

لتكن Ω تمثل مجموعة نتائج تجربة عشوائية و F جبر الأحداث المعرف عليها ولتعرف الدالة:

$P: F \rightarrow R$ كما يأتي:

1. $\forall \; A \in F : \; P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. من أجل متتالية معدودة من الحوادث المتنافية مثنى مثنى من F :

.... $A_1, A_2 \ldots., A_n$ يكون: $P[\cup_{n\geq 1} A_n] = \sum_{n\geq 1} P(A_n)$

عندئذ ندعو P بأنه دالة احتمالية أو احتمال بشكل مختزل ، ويكون P(A) هو احتمال وقوع الحادث A من F في Ω . وهذا التعريف يدعى بتعريف كولموغوروف للاحتمال.

تعريف:

ندعو الثلاثية (Ω, F, P) بالفضاء الاحتمالي إذ Ω تمثل فضاء العينة و F جبر الأحداث على Ω و P قياس احتمال معرف حسب كولموغوروف.

وندعو هذا الفضاء بالفضاء الاحتمالي المنفصل، إذا كانت مجموعة الأحداث الابتدائية للتجربة فيه منتهية أو معدودة. ويكون فضاء مستمراً إذا كانت مجموعة الأحداث الابتدائية في فضاء العينة غير منتهية وغير معدودة.

4.6.1.3 أمثلة محلولة:

مثال (7.3) : يتسابق في الجري ثلاثة أشخاص A, B, C فإذا كان احتمال فوز C هو ضعف احتمال فوز(A) ، واحتمال فوز A هو ثلاثة أضعاف احتمال فوز B. والمطلوب: عين احتمال فوز كل منهم ، ثم عين احتمال فوز B أو C علماً بأن هناك فائزاً واحداً فقط.

الحل: ليكن احتمال فوز B يمثل K فاحتمال فوز A هو 3K واحتمال فوز C هو 2(3K) ، أي 6K وبما أن A, B, C تشكل تجزئة لـ Ω فإن:

$$P(A) + P(B) + P(C) = P(\Omega) \Rightarrow 3K + K + 6K = 1 \Rightarrow 10K = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{10}$$

ومنه: $P(A) = 3k = \frac{3}{10}; P(B) = K = \frac{1}{10}; P(C) = 6K = \frac{6}{10}$

ويكون احتمال فوز B أو C أي:

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{1}{10} + \frac{6}{10} = \frac{7}{10}$$

(لأن B, C متنافيان لأنَّ لدينا فائزاً واحداً).

مثال (8.3):

لدينا 5 بذور، اثنتان منها تنتجان زهوراً حمراء ، نرمز لها بـ R_1, R_2 واثنتان منها تنتجان زهوراً بيضاء ، ونرمز لها بـ W_1, W_2 ، وواحدة منها تنتج زهوراً صفراء، ونرمز لها بـ y. خلطنا هذه البذور جيداً واخترنا منها عشوائياً بذرتين. فما احتمال أن تنتجا زهوراً من اللون نفسه ، وما احتمال أنْ تنتجا زهوراً من لونين مختلفين.

الحل:

يمكننا تمثيل نتائج هذه التجربة بالشكل الآتي:

	R_1	R_2	W_1	W_2	Y
R_1	_	$R_1 R_2$	$R_1 W_1$	$R_1 W_2$	R_1 Y
R_2	$R_2 R_1$	_	$R_2 W_1$	$R_2 W_2$	R_2 Y
W_1	$W_1 R_1$	$W_1 R_2$	_	$W_1 W_2$	W_1 Y
W_2	$W_2 R_1$	$W_2 R_2$	$W_2 W_1$	_	W_2 Y
Y	Y R_1	Y R_2	Y W_1	Y W_2	_

يلحظ أن مقدار فضاء العينة (مجموعة نتائج التجربة) $|\Omega| = 20$

وليكن A حادثة الحصول على زهور من اللون نفسه

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{20} = 0.2$$

وليكن B حادثة الحصول على زهور من لونين مختلفين

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{16}{20} = 0.8$$

أو $P(B) = 1 - P(A) = 1 - 0.2 = 0.8$.

7.1.3 الخصائص الرئيسية العامة للاحتمال:

1. خصائص مباشرة: ليكن (Ω,F,P) فضاء احتمالياً، ولنفرض أن جميع المجموعات الواردة هي أحداث (عناصر من F):

من أجل أي $B\ ,\ A \in F$ ، لدينا: $A \cup \acute{A} = \Omega$

$B = B \cap \Omega = B \cap \left(A \cup \acute{A}\right) = (B \cap A) \cup (B \cap \acute{A})$ (وهما حدثان متنافيان عندئذ):

خاصة (1):

$$\Rightarrow P(B) = P(A \cap B) + P(\acute{A} \cap B)$$

وبالمثل من أجل $B \cup \acute{B} = \Omega$

خاصة (2): $P(A)=P(A\cap B) + P(A \cap \acute{B})$

وبوضع $B = \Omega$ في الخاصة (1) نجد:

$$P(\Omega) = P(A \cap \Omega) + P\left(\acute{A} \cap \Omega\right) \Rightarrow\ 1 = P(A) + P(\acute{A})$$

خاصة (3) :

$$\Rightarrow \quad P(A) + P(\acute{A})=1 \ ; \ \ P(A) = 1 - P(\acute{A})$$

وفي الخاصة (3) بوضع $A = \emptyset$ نجد:

خاصة(4):

$$P(\emptyset) + P(\Omega) = 1 \ \Rightarrow \quad P(\emptyset) + 1 = 1 \ \ \Rightarrow \quad P(\emptyset) = 0$$

وإذا كان $A \subseteq B$ فإن الخاصة (1) تصبح من الشكل:

خاصة (5):

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\acute{A} \cap B) = P(A)\ + P(B \backslash A) \Rightarrow$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

خاصة (6): $P(B) \geq P(A)$

ومن أجل أي $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$ وحسب الخاصة (6) نجد:

خاصة (7):

$$P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega) \Rightarrow \ \ 0 \leq P(A) \leq 1$$

ومن أجل متتالية معدودة من الحوادث $A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots, A_n \ldots\ldots$ من F وحسب دومرغان:

$$(\cup_{i\geq} A_i)' = \cap_{i\geq 1} \acute{A}_i$$

نجد من الخاصة (3):

خاصة (8) :

$$P(\cup_{i\geq 1} A_i) = 1 - P(\cup_{i\geq 1} A_i)' \Rightarrow \boxed{P(\cup_{i\geq 1} A_i) = 1 - P\left(\cap_{i\geq 1} \acute{A}_i\right)}$$

ومن أجل أي حادثتين A, B من F وكان $A \cap B \neq \emptyset$ (غير متنافيتين) وكون:

$$A \cup B = A \cup [B\backslash(A \cap B)] \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P[B\backslash(A \cap B)]$$

وكون $A \cap B \subseteq B$ فحسب الخاصة (5) نجد:

خاصة (9) $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

مثال (9.3):

قذفنا ثلاثة أحجار نرد، وبمعرفة أنه لا يمكن لحجرين أن يعطيا القيمة العددية نفسها، عين احتمال الحصول على الوجه واحد.

الحل:

لتكن A حادثة الحصول على الوجه واحد.

فتكون 'A حادثة عدم الحصول على الوجه واحد من أي حجر.

$|\Omega|=6\times5\times4=120 \qquad ; \qquad |A| =5\times4\times3=60$

$$P(A) = 1 - P(\acute{A}) = 1 - \frac{60}{120} = 0.5$$

مثال (10.3):

يرغب طالب في دراسة الطب، فبعد أن رفض طلبه في جميع الكليات في بلده، لجأ للمراسلة مع دول خارجية ، وذلك بمساعدة مؤسستين للمراسلة، بقصد تحصيل قبول في إحدى الدول عن طريقها ، وهي y, x فإذا كان احتمال أن يحصل على قبول عن طريق x هو (0.7)، واحتمال أن يحصل على قبول عن طريق y هو (0.4)، وبشك 75% من أن إحدى المؤسستين سوف لا تحصل له قبولا. عين احتمال حصوله على قبول من إحدى المؤسستين.

الحل:

لتكن الحادثة A حادثة حصول الطالب على قبول عن طريق المؤسسة x

ولتكن الحادثة B حادثة حصول الطالب على قبول عن طريق المؤسسة y.

ولدينا : P(A)=0.7 ، P(B)=0.4 ، $P(\acute{A} \cup \acute{B}) = 0.75$

والحادث المطلوب $A \cup B$ حيث A, B غير متنافيين، فعندئذ:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - [1 - P(A \cap B)']$$

$$= P(A) + P(B) - 1 + P(A' \cup B')$$

$$= 0.7 + 0.4 - 1 + 0.75 \quad = 0.85$$

- **تعميم حساب احتمال اتحاد عدة حوادث:**

من أجل ثلاث حوادث A_1, A_2, A_3 غير متنافية من F يكون:

$$P[A_1 \cup A_2 \cup A_3] = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2)$$
$$- P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

مثال (11.3):

مؤسسة تجارية تستخدم عمالاً من المدينة ومن خارجها. فإذا كان 60% من العمال إناثاً و 30% من العمال من المدينة، وواحد من العمال من كل أربعة عمال هو من الذكور ومن المدينة. عين نسبة الإناث العاملات من خارج المدينة في هذه المؤسسة.

الحل :

ليكن F حادثة كون العمال الإناث ، فيكون $P(F) = 0.60$.

وليكن M حادثة كون العمال من الذكور، فيكون

$$. \; P(M) = 1 - P(F) = 0.40$$

وليكن C حادثة كون العمال من المدينة، فيكون $P(C) = 0.30$.

وليكن B حادثة كون العمال من خارج المدينة، فيكون

$$. \; P(B) = 1 - P(C) = 0.70$$

كون $\acute{C} = B$

ولدينا $P(M \cap C) = 0.25$ والمطلوب حساب $P(F \cap B)$ ؟

$$P(F) = P(F \cap C) + P(F \cap B) \Rightarrow$$

$$P(F \cap B) = P(F) - P(F \cap C)$$

$$= P(F) - [P(C) - P(M \cap C)]$$

$$= P(F) - P(C) + P(M \cap C)$$

$$= 0.60 - 0.30 + 0.25 = 0.55$$