المحاضرة الخامسة

5.3 المتغير العشوائي والتوزيع الاحتمالي

مثال (21.3):

لتكن التجربة اختيارا عشوائياً لطالب من الطلاب المسجلين في جامعة دمشق وليكن:

$X=0$ أو $X=1$ وفقاً لما إذا كان يسكن في المدينة الجامعية أو لا يسكن في المدينة الجامعية .

Y = عدد أخوته

Z = طوله بالسنتمتر

فالمتغيرات X و Y و Z هي متغيرات عشوائية. وكل متغير من هذه المتغيرات الثلاثة يأخذ قيمة واحدة و واحدة فقط عند كل تجربة.

فمن أجل كل طالب يأخذ X قيمة واحدة فقط هي إما 1 وإمّا 0 ، و يأخذ Y قيمة واحدة فقط هي عبارة عن عدد صحيح غير سالب. ويأخذ Z قيمة واحدة فقط هي عبارة عن عدد حقيقي موجب.

مثال (22.3):

لتكن التجربة هي إلقاء قطعة نقود ثلاث مرّات متتالية ، وليكن X عدد أوجه الـ H التي نحصل عليها . فالمتغير X هو متغير عشوائي قيمه الممكنة 0 أو 1 أو 2 أو 3 .

وهو يأخذ قيمة واحدة عند كل مرّة نجري هذه التجربة ، والجدول الآتي يبيّن ذلك:

نتيجة التجربة	HHH	HHT	HTH	THH	HTT	THT	TTH	TTT
قيمة X	3	2	2	2	1	1	1	0

مما سبق يتضح لنا بصورة عامة ، مفهوم المتغير العشوائي.

مثال (23.3):

نقذف قطعة نقود حتى يظهر وجه الـ H للمرة الأولى . وليكن X عدد القذفات التي نحتاج إليها. النتائج الممكنة للتجربة أو فضاء العينة (مجموعة نتائج التجربة) هو:

H , TH , TTH ,....

ومن الواضح أن X يمكن أن يكون 1 أو 2 أو 3 الخ ....أي إنَّ فضاء العينة الذي ولده X ، أو مجموعة قيمه الممكنة هي مجموعة الأعداد الطبيعية {1,2,3,...}.

1.5.3 <u>تصنيف المتغيرات العشوائية:</u>

لنعد إلى المثال (21.3) ولنتساءل عن مجموعة القيم الممكنة لـ Z، طول الطالب. بما أننا سنستخدم مسطرة مدرجة لقياس الطول فإنّ طول الطالب سيقابل نقطة على هذه المسطرة هي في الواقع نقطة محور موجه.

والقيمة التي يأخذها Z يمكن أن تكون أي نقطة من مجال على محور موجه. وبالطبع يوجد في أي مجال من محور موجه، مهما كان صغيراً ، مالا نهاية له ولا يمكن عدّه أو حصره من النقاط. وبالرغم من أنّ فضاء العينة يولده X في المثال (3.5) لا نهائي أيضاً. إلاّ أنَّ هناك خلافاً أساسياً بين طبيعتي الفضاءَيْنِ . فإحداهما قابل للعد والآخر غير قابل للعد (لماذا ؟)

1.1.5.3<u>الفضاء المنقطع (منفصل):</u>

نقول عن فضاء عينة إنّه فضاء منفصل إذا كان يحوي عدداً منتهياً من النقاط أو لا نهاية قابلة للعد من النقاط.

2.1.5.3<u>الفضاء المستمر (المتصل):</u>

نقول عن فضاء عينة إنّه فضاء متصل (أو مستمر) إذا كان يحوي لا نهاية غير قابلة للعد من النقاط.
ووفقاً لهذا التصنيف نصنف المتغيرات العشوائية إلى متغيرات منفصلة ومتغيرات متصلة (مستمرة).

3.1.5.3<u>المتغير العشوائي المنفصل(المنقطع):</u>

نقول إنَّ المتغير العشوائي منفصل إذا كانت مجموعة قيمه الممكنة مجموعة منتهية أو لا نهائية قابلة للعد أي إذا كان الفضاء الاحتمالي الذي يولده هذا المتغير فضاء منفصل.

4.1.5.3 المتغير العشوائي المتصل (المستمر):

نقول عن متغير عشوائي أنه مستمر إذا كانت مجموعة قيمه الممكنة مجموعة لا نهائية وغير قابلة للعد .

2.5.3 المتغيرات العشوائية المنفصلة وتوزيعاتها:

التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل هو صيغة أو جدول يعرض القيم الممكنة والاحتمال الموافق لكل قيمة.

مثال(24.3):

إنّ التوزيع الاحتمالي في المثال (22.3) لـ X هو:

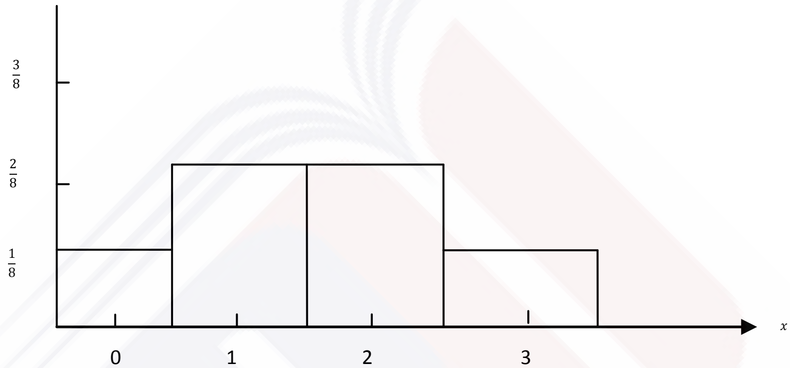
X	0	1	2	3
$f_X(x) = P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

حيث $f(x) = p(X = x)$

(على الطالب فهم كيف تمّ الحصول على الجدول).

ويمكن تمثيل هذا التوزيع بيانياً لنحصل على ما يسمى بالمدرج الإحتمالي.

فلنتخذ القيم الممكنة مراكز لمجالات (فترات) تمتد بمقدار الواحد (نصف على اليمين القيمة ونصف على يسارها) ولنرسم فوق كل فترة (مجال) مستطيلاً ارتفاعه يساوي الاحتمال الموافق ، فنحصل على مدرج الاحتمال كما في الشكل الآتي:



المدرج الاحتمالي للتوزيع في المثال (22.3)

يجب أن تحقق دالة الاحتمال $f(x)$ المتغير العشوائي منفصل الشرطين الآتيين:

1. $f(x) \geq 0$ مهما تكون x
2. $\sum_x f(x) = 1$ حيث $\sum_x$ تعني المجموع فوق مجموع القيم الممكنة x للمتغير X .

3.5.3: المتغيرات العشوائية المستمرة:

تشكل الكميات التي تستخدم للحصول على مقاديرها لأجهزة قياس، أو أدوات قياس متغيرات عشوائية مستمرة. فالوزن والقوة والطول ومعدل هطول المطر ودرجة حرارة جسم كلها أمثلة على متغيرات عشوائية مستمرة. وقياسات مثل هذه المتغيرات هي نقاط على خط اتخذنا عليه تدريجاً أو سلماً للقياس، أي إنها نقاط

على المحور الموجه (محور الأعداد الحقيقية)، أو على فترات (مجالات) من هذا المحور ، ولا يمكننا في حالة متغير عشوائي مستمر، تخصيص احتمال مهما كان صغيراً لأي قيمة من قيم المتغير نظراً للكثرة الكاثرة من القيم المختلفة، إذ توجد لا نهاية غير قابلة للعد من النقاط في أي فترة مهما صغرت، مما يؤدي إلى الخروج عن مسلمة الاحتمال (التي تقول إن احتمال أي حدث لا يزيد على الواحد). (يجب التوضيح) . و لا بد من التفكير في طريقة لبناء النموذج الاحتمالي مختلفة تماماً عما رأيناه في حالة متغير عشوائي منفصل.

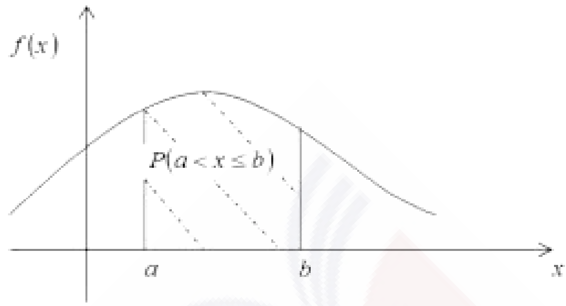
بالعودة إلى الإحصاء الوصفي إذ رأينا إمكانية تفسير المساحة تحت مدرج التكرار النسبي كاحتمال. وإلى منحني التكرار حيث يمثل كل نقطة على محور السينات (المحور *ox*) قياساً ، ويمثل الإحداثي العمودي (على المحور *oy*) لتلك النقطة تواتراً ، أو تكرار ظهور هذا القياس في المجتمع من القياسات الذي يصفه منحني التكرار. إذ تقدم لنا هذه الأفكار نقطة البداية في محاولة بناء نموذج احتمال عشوائي مستمر.

لنبدأ بالقول إنه إذا كان تكرار ظهور القياس *a*، مثلاً أكبر من تكرار ظهور القياس b. ولتغير منحني التكرار منحني كثافة يبّين لنا كيف تتغير الكثافة الاحتمالية من نقطة إلى أخرى. ولنسمي الدالة المستمرة $f(x)$ التي بيانها هو منحني التكرار، دالة كثافية احتمالية .عندئذ تمثل المساحات تحت هذا المنحني احتمالات.

واحتمال أن يقع قياس المتغير X ضمن الفترة (*a,b*) ،أي

$\mathrm{p}(a < X < b)$ هو المساحة تحت منحني الكثافة وفوق المجال (*a,b*)

(انظر الشكل الآتي)



وترتب علينا مثل هذه الطريقة شرطين ، لا بدَّ لأي دالة كثافة أن تحققهما كي لا نخرج على مسلمات الاحتمال . فما دام الاحتمال غير سالب ، لا يجوز أن يكون جزء من منحني الكثافة تحت المحور الأفقي ox . وبما أنَّ احتمال الحادثة الأكيدة أي $p\ (-\infty < X < +\infty)$ يجب أن يكون مساوياً للواحد تماماً.

وهكذا نكتب القاعدة الآتية:

<u>قاعدة :</u>

كي تصلح دالة مستمرة $f(x)$ كدالة كثافة احتمالية يجب أن تحقق الشرطين الآتيين:

1. $f(x) \geq 0$ مهما يكن x.
2. المساحة تحت بيان $f(x)$ (أي تحت منحني الكثافة) تساوي الواحد تماماً.

<u>4.5.3 دالة التوزيع الاحتمالي المتجمع:</u>

رأينا أنّ التكرار المتجمع الصاعد يجيب عن السؤال الآتي: ما التكرار النسبي لظهور قياس يقل عن قيمة محددة؟ وستجيب دالة التوزيع المتجمع عن سؤال مشابه: ما احتمال أن يأخذ متغير عشوائي X قيمة أقل أو تساوي قيمة محددة؟

وإذا رمزنا لهذه الدالة بـ F فإن قيمة هذه الدالة في النقطة x هي ببساطة احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X قيمة أقل أو تساوي x أي :

$$F(x) = p(X \leq x)$$

1.4.5.3 حالة متغير عشوائي منفصل:

دالة التوزيع المتجمع لمتغير عشوائي منفصل X ، دالة احتماله $f(x)$ هي بالتعريف :

$$F(t) = \sum_{x \leq t} f(x)$$

حيث $\sum_{x \leq t}$ تعني المجموع فوق جميع القيم الممكنة التي تقل عن t.

مثال (25.3):

في المثال (27.3) ما احتمال الحصول على وجه الـ H مرتين على الأكثر؟

الحل :

المطلوب هو حساب :

$$P(X \leq 2) = F(2) = \sum_{x=0}^{2} f(x) = f(0) + f(1) + f(2)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

تمرين: أعط تفسيراً عملياً لهذه النتيجة.

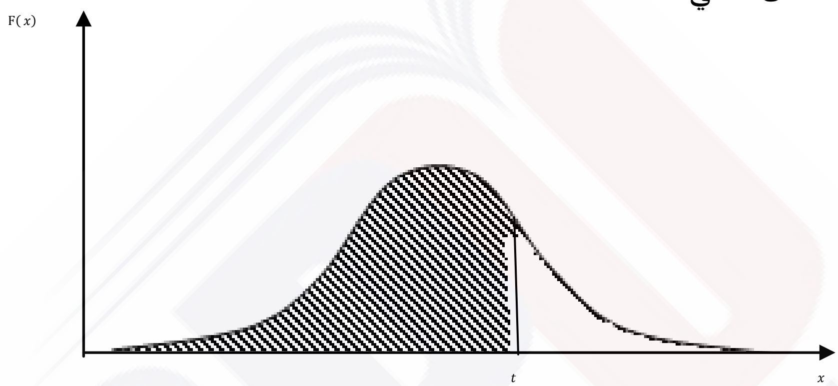
2.4.5.3 حالة متغير عشوائي مستمر:

دالة التوزيع المتجمع لمتغير عشوائي متصل x دالة كثافته $f(x)$ هي بالتعريف:

المساحة تحت منحني الكثافة الواقعة إلى اليسار من النقطة t

$$F(t) = P(X \leq t)$$

انظر الشكل الآتي :



دالة التوزيع المتجمع لمتغير عشوائي متصل

سنتحدث في الفقرتين القادمتين عن متوسط مجتمع القياسات وعن تباينه على الترتيب . وسنصطلح على استخدام عبارة (متوسط المجتمع) أو عبارة (تباين المجتمع) أو (تباين التوزيع)، و (الانحراف المعياري للمجتمع) أو (الانحراف المعياري للتوزيع) . وسنرمز كما جرت العادة في أدبيات الإحصاء للانحراف المعياري للمجتمع بالحرف اليوناني σ (ننطقه < سيجما>).

<u>التوقع الرياضي :</u>

1.5.3 <u>التوقع الرياضي لمتغير عشوائي:</u>

ليكن X متغيراً عشوائياً منفصلاً دالة احتماله $f(x)$.

ولنرمز لتوقع X بـ E(X) أو μ_X أو μ ، فعندئذٍ : $E(X) = \sum_x x.f(x)$

حيث $\sum_x$ يعني المجموع فوق كل القيم الممكنة للمتغير X.

هذا التعريف يقدم قاعدة لحساب توقع متغير عشوائي منفصل .

المعنى التطبيقي لـ $E(X)$ أو التفسير العملي له: القيمة المتوقعة $E(X)$ للمتغير X هي متوسط القيم التي يمكن أن يفترضها هذا المتغير على المدى الطويل، أي بعبارة أخرى متوسط مجتمع القياسات الموافق للمتغير X.

مثال (26.3):

في المثال (22.3) احسب $E(X)$.

الحل:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{3} x.f(x) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = 1.5$$

ومما سبق يمكن القول إنّ:

1. (المقدار 1.5) هي القيمة المتوقعة رياضياً لعدد أوجه الـ H .

2. يتمركز التوزيع الاحتمالي لعدد أوجه الـ H حول النقطة 1.5 . ولو نظرنا إلي صورة المدرج الاحتمالي في المثال (22.3) لوجدنا أنه يتمركز حول النقطة 1.5 على المحور ox. فالقيمة 1.5 هي متوسط التوزيع الاحتمالي.

3. التفسير العملي للقيمة 1.5 هو أنها تمثّل القيمة المتوسطة لعدد أوجه الـ H على المدى الطويل (أي متوسط مجتمع القياسات) . بمعنى أننا لو كررنا قذف قطع النقود الثلاث عدداً هائلاً من المرّات وسجلنا عدد أوجه الـ H التي حصلنا عليها ثم حسبنا متوسط هذه الأعداد لحصلنا على1.5 .

2.5.3 التوقع الرياضي لدالة عددية في X :

$$E[g(X)] = \sum_x g(x).f(x)$$

مثال (27.3): احسب $E(X^2)$ في المثال (23.3):

الحل :

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{6} x^2.f(x)$$

$$= 1^2.\frac{1}{6} + 2^2.\frac{1}{6} + 3^2.\frac{1}{6} + 4^2.\frac{1}{6} + 5^2.\frac{1}{6} + 6^2.\frac{1}{6}$$

$$= \frac{91}{6} = 15.17$$

وبصورة مشابهة تماماً نعرف توقع متغير عشوائي مستمر . كل ما في الأمر أنّ دالة الكثافة الاحتمالية تقوم مقام دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير المنفصل وتصبح إشارة المجموع Σ إشارة تكامل $\int$. ولن نتطرق لذلك في هذا المقرر.

3.5.3 خواص التوقع :

1. (**c** ثابت) $E(c) = \sum_x c.f(x) = c.\sum_x f(x) = c$
2. $E(cX) = \sum_x cx.f(x) = c.\sum_x x.f(x) = c.E(X)$
3. إذا كان $g(X) = g_1(x) + g_2(x)$ **فإنّ:**

$$E[g(X)] = \sum_x g(x).f(x) = \sum_x [g_1(x) + g_2(x)].f(x)$$

$$= \sum_x g_1(x).f(x) + \sum_x g_2(x).f(x) = E[g_1(X)] + E[g_2(X)]$$

ومنه نستنتج الخاصة:

$$E[g_1(X) + g_2(X)] = E[g_1(X)] + E[g_2(X)]$$

وبصورة خاصة ، إذا كان X_1 و X_2 أي متغيرين عشوائيين فإنّ:

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

4. من الخاصتين السابقتين يمكننا أن نكتب بصورة عامة:

$$E[C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots . C_nX_n] = C_1E(X_1) + C_2E(X_2) + \cdots . + C_nE(X_n)$$

حيث X_1 و X_2 و .....و X_n متغيرات عشوائية و $c_1, c_2, \ldots \ldots, c_n$ أعداد ثابتة.

مثال (28.3):

تقدم الإحصائية الآتية وصفاً لمجتمع الأسر التي تقطن مدناً كبيرة من حيث خاصية امتلاكها للسيارات:

20% من الأسر لا تمتلك أي سيارة و 50% من الأسر تمتلك سيارة واحدة و 15% من الأسر تمتلك سيارتين و 10% من الأسر تمتلك ثلاث سيارات و 5% من الأسر تمتلك أربع سيارات.

إذا رمزنا بـ X لعدد السيارات و بـ Y لعدد العجلات التي تمتلكها أسرة.

1. ما متوسط عدد السيارات للأسرة الواحدة؟
2. احسب متوسط عدد العجلات للأسرة الواحدة.

الحل:

1. من الواضح أنّ الوصف المعطى لمجتمع الأسر والمتعلق بقياسات X في هذا المجتمع يقدم دالة التوزيع الاحتمالي لـ X .

X	0	1	2	3	4
f(x)	0.20	0.50	0.15	0.10	0.05

ومتوسط عدد السيارات للأسرة الواحدة هو $E(X)$. ومن التعريف لدينا :

$E(X) = \sum_x x.f(x)$
$=0(0.20)+ 1(0.50)+ 2(0.15)+ 3(0.10)+ 4(0.05)=1.3$

2. عدد العجلات عند أسرة هو عدد السيارات التي تمتلكها مضروباً بـ 5 أي:

$$Y = 5X$$

والمطلوب هو $E(Y)$. ومن خواص التوقع لدينا:

$$E(Y) = E(5X) = 5E(X)= 5(1.3) =6.5$$

ومتوسط عدد العجلات للأسرة الواحدة هو *6.5* عجلة.

3.5.3 تباين متغير عشوائي:

تعريف: تباين متغير عشوائي X ، ونرمز له بـ $V(X)$ أو σ^2_X أو σ^2 عندما نأمن الالتباس ويعطى بالعلاقة :

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X - \mu)^2$$

نتيجة : الصيغة المختزلة للتباين هي :

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

مثال (29.3):

في المثال (22.3) احسب تباين X .

الحل:

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

$$E(X^2)= 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

ونعلم من المثال (*32.3*) أن $\mu = E(X) = 1.5$

إذاً :

$$V(X) = 3-(1.5)^2 = 3 - 2.25 = 0.75$$

4.5.3 الانحراف المعياري لمتغير عشوائي:

الانحراف المعياري لمتغير عشوائي X وسنرمز له بـ σ_X أو اختصاراً σ عندما نأمن الالتباس ، هو الجذر التربيعي الموجب للتباين:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

وفي المثال السابق الانحراف المعياري لعدد أوجه الـ ***H*** الناتجة عن قذف ثلاث قطع متزنة من النقود هو :

$$\sigma = \sqrt{0.75} = 0.865$$

خواص التباين:

1. تباين العدد الثابت هو الصفر

$$V(C) = E(C^2) - [E(C)]^2 = C^2 - C^2 = 0$$

2. $V(CX) = C^2 V(X)$ حيث X أي متغير عشوائي و C ثابت.

3. يمكن البرهان أنّه إذا كان المتغيران X_1 و X_2 مستقلين فيما بينهما فإنّ

$$V(X_1 \mp X_2) = V(X_1) + V(X_2)$$

ويمكن تعميم هذه القاعدة إلى أكثر من متغيرين ، فنقول إنّه إذا كانت المتغيرات $X_1, X_2, \dots\dots, X_n$ مستقلة فيما بينها فإنّ:

$$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$$

أو بعبارة أخرى: $V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$

105