المحاضرة العاشرة

4.4) التقدير النقطي :

رأينا أن المجتمع الإحصائي يمثل بمتغير عشوائي X ، و معرفة توزيع المتغير العشوائي X يجعلنا قادرين على دراسته احتمالياً، و عادة يكون توزيع المجتمع أو التوزيع الاحتمالي لـ X يتبع وسطاء ، و عندما تكون هذه الوسطاء مجهولة نلجأ لتقديرها اعتماداً على عينة عشوائية حجمها n من X ، فإذا كان θ وسيطاً مجهولاً لتوزيع X فإننا نقوم بتقدير θ بوساطة دالة مثل $\mathrm{T} = \mathrm{T}\,(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2\ , \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{n})$ و قيمة T و لتكن t مقدراً لـ θ و نرمز لمقدر θ عاده بـ $\hat{\theta}$ و من خلال طرق التقدير النقطية سيكون:

1- متوسط العينة $\bar{x}$ مقدراً لمتوسط المجتمع μ .

2- و تباين العينة S^2 مقدراً لتباين المجتمع σ^2 .

3- و الانحراف المعياري S مقدراً للانحراف المعياري للمجتمع σ .

4- إذا كان لدينا مجتمع إحصائي و أردنا أن تقدير نسبة العناصر من المجتمع التي تحقق صفة معينة ، فيمكن أن نمثل هذا المجتمع بمتغير عشوائي برنولي X يأخذ القيمة 0 إذا لم يحقق الصفة و القيمة 1 إذا كان يحققها . عندئذ إذا كانت $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2\ , \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{n}$ عينة عشوائية من X الذي يتوزع وفق برنولي بالوسيط p (احتمال حدث النجاح) فإن $\hat{p} = \bar{x} = \frac{y}{n}$ هو مقدر لـ p حيث يدل y على عدد العناصر التي تحقق الصفة في العينة .

و نريد من هذه المقدرات أن تحقق معايير جودة المقدرات (مقدر غير منحاز (منصف) – مقدر فعال – مقدر متماسك)

تعريف (4-8): إذا كان $\hat{\theta}$ مقدراً للوسيط θ فإننا ندعوه بالمقدر غير المنحاز لـ θ إذا حقق الشرط الآتي : $E\left(\hat{\theta}\right) = \theta$.

تعريف (4-9) : إذا كان $\hat{\theta}$ مقدراً للوسيط θ و كان له أصغر تباين من بين كل المقدرات الأخرى لـ θ عندئذ نقول إن المقدر $\hat{\theta}$ هو مقدر فعال لـ θ .

و إذا كان $\hat{\theta}$ مقدراً منصفاً (غير منحاز) لـ θ و كان $V\left(\hat{\theta}\right) = \min$

فإننا ندعوه عندئذ بالمقدر المنصف ذي التشتت الأصغري (التباين الأصغري).

تعريف (4-10) : يكون $\hat{\theta}$ مقدراً متماسكاً (متسق) للوسيط θ إذا كان :

$$\lim_{n\to\infty} V\left(\hat{\theta}\right) = 0 \quad ، \quad E\left(\hat{\theta}\right) = \theta$$

و بناء عليه فإن متوسط العينة $\bar{x}$ هو مقدر غير منحاز لمتوسط المجتمع μ و كذلك $\hat{p} = \frac{y}{n}$ هو مقدر غير منحاز لنسبة تحقق صفة معينة في المجتمع P و لكن $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ هو مقدر غير منصف (منحاز) لتباين المجتمع σ^2 بينما يكون $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ هو مقدر منصف لـ σ^2.

5.4) : مجالات الثقة (التقدير المجالي) :

رأينا في الفقرة السابقة مسألة التقدير النقطي حيث عينا بالمقدر النقطي القيمة التي يأخذها المقدر من أجل عينه معينة من قيم المتغير X فإذا فرضنا أن X متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي يتبع وسيطاً مجهولاً θ و أن $\hat{\theta}$ هو مقدر للوسيط θ يحقق معايير الجودة في الإنصاف و الفعالية .

فإننا سنتوقع من أجل عينة معينة من قيم X مثل $X_1, X_2, \dots, X_n$ بأن قيمة المقدر $\hat{\theta}$ لن تختلف كثيراً عن القيمة الحقيقية للوسيط θ و أن الخطأ المرتكب عندما نفترض أن قيمة المقدر مساوية قيمة الوسيط المجهول θ لن يكون كبيراً، و مع ذلك فإن قيمة واحدة للمقدر لا تحمل أي دلالة على الدقة الحاصلة في ذلك

التقدير ، لذلك يكون من المرغوب فيه إنشاء مجال بحيث يغطي هذا المجال القيمة الحقيقية للوسيط المجهول θ باحتمال مفروض .

تعريف (4-11) : ليكن X متغيراً عشوائياً توزيعه الاحتمالي يتبع وسيطاً مجهولاً θ و لنفترض أن $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية للمتغير X و أن L_1, L_2 إحصاءان على أساس العينة المفروضة .

إننا نقول عن المجال $[L_1, L_2]$ إنه مجال ثقة لـ θ بمستوى من الثقة

%$100(1-\alpha)$. حيث α يدعى بمستوى المعنوية و $(1-\alpha)$ معامل الثقة .

إذا كان
$$P\,[L_1 \le \theta \le L_2] = 1 - \alpha$$

و بملاحظة أن طرفي المجال $[L_1, L_2]$ هما متغيران عشوائيان يتغيران من عينة لأخرى ، فيمكن أن نسمي هذا المجال بالمجال العشوائي و من أجل كل عينة من قيم Xنستطيع حساب كل من L_1, L_2 و الحصول على مجال يكون على ثقة %$100(1-\alpha)$ من أنه يحوي على القيمة الحقيقية للوسيط المجهول θ، و سنواجه حالات يكون فيها هناك أكثر من حل ، و سنختار منها تلك الحالة التي يكون فيها طول مجال الثقة أصغرياً قدر الإمكان .

1.5.4) : مجال الثقة لمتوسط متغير عشوائي طبيعي تباينه معلوم

ليكن $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فيه μ مجهول و σ^2 معلوم .

و لتكن $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية لـ X ، رأينا أن:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N\ (0,1\ )$$

و المطلوب تعيين مجال ثقة حول μ بمستوى ($1-\alpha$) من الثقة أي من

$$p\ [z_1 \le z\ \le z_2] = 1 - \ \alpha \qquad (7\text{-}4)$$

و من خواص الكثافة الطبيعية المعيارية المتناظرة بالنسبة لمحور التراتيب سنجد

$$p\ \left[- z_{1-\alpha/2} \le z\ \le z_{1-\alpha/2}\right] = 1 - \ \alpha \ \Rightarrow$$

$$p\ \left[-z_{1-\alpha/2} \le \frac{\bar{x} - \mu}{б/\sqrt{n}} \le z_{1-\alpha/2}\right]\ =\ 1 - \ \alpha \qquad \Leftrightarrow$$

$$p\ \left[\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{б}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} +\ z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\ =\ 1 - \ \alpha$$

أي إن المجال $[\ \bar{x}\ - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ , \bar{x} +\ z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

هو $(1 - \alpha)100$ مجال ثقة للمتوسط μ

و نقول إننا واثقون باحتمال $(\ 1 - \alpha\ )$ من أن μ لن يقل عن $\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ و لن يزيد على $\bar{x} +\ z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

ملاحظة: بفضل مبرهنة النهاية المركزية و من أجل العيَنات العشوائية من مجتمعات غير طبيعية ذات تباين معلوم σ^2 و من الحجم $n \ge 30$ يكون لدينا نفس مجال الثقة حول μ بمستوى $(\ 1 - \alpha\ )$.

و نسمي المقدار $\varepsilon = \left|\mp z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right|$ بالخطأ الأعظمي المطلق و المرتكب في تقدير μ عن طريق $\bar{x}$ وبثقة$(1-\alpha)$ ، و هذا الخطأ يتناقص بازدياد حجم العينة n، لذلك يمكن التحكم بالخطأ الأعظمي بوساطة حجم العينة .

و إذا أردنا تعيين حجم العينة التي ينبغي أخذها بحيث لا يتجاوز الخطأ في تقديرنا لـ μ ب $\bar{X}$ المقدار ε و بثقة $(1-\alpha)$ من المقدار

$$\left|\mp z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right| \leq \varepsilon$$

و بتربيع الطرفين و نقل n للطرف الآخر نجد :

$$n \geq \left[\frac{z_{1-\alpha/2}\sigma}{\varepsilon}\right]^2$$

مثال (4-4) :

أجريت معايرة كمية الخضاب في الدم لعينة مؤلفة من 36 طفلاً ، فكان متوسط الخضاب لديهم 11.3 g ، فإذا كانت العينة مختارة من مجتمع فيه الانحراف المعياري لكمية الخضاب 2.5 g فالمطلوب :

1. أوجد 98% مجال ثقة حول المتوسط الحقيقي μ لكمية الخضاب لمجتمع الأطفال الذي أخذت من العينة .

2. كم ينبغي أن يكون حجم العينة بحيث لا يتجاوز الخطأ في تقدير μ بثقة 98% المقدار $\varepsilon = 0.80$؟

الحل :

1. بما ان $n = 36 \geq 30$ ، فيمكن وضع مجال ثقة تقريبي لـ μ متوسط كمية خضاب الدم في المجتمع و ذلك على الرغم من أن كمية الخضاب ليس لها التوزيع الطبيعي ، و بملاحظة أن :

$1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.99 \Leftarrow 1 - \alpha = 0.98$ و من جدول التوزيع الطبيعي المعياري $z_{0.99} = 2.33$

و يكون المجال :

$$\left[\bar{x} - z_{1-\alpha\alpha/_2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{1-\alpha/_2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

أي

$$[\,11.3 - (\,2.33)\frac{(2.5)}{6} \leq \mu \leq 11.3 + (\,2.33)\frac{(2.5)}{\sigma}\,]$$

فيكون : $[\,10.329 \leq \mu \leq 12.271]$

أي نكون واثقين 98% من أن المتوسط كمية الخضاب الدم عند الأطفال المجتمع المدروس لن تقل عن 10.329 g و لن تزيد على 12.271 g .

2. لتعيين n بحيث يكون : $n \geq \left[\frac{z_{1-\alpha/_2}\sigma}{\varepsilon}\right]^2 = \left[\frac{(2.33\,)(\,2.5)}{0.80}\right]^2$

أي يجب أن يكون حجم العينة $n \geq 54$

<u>ملاحظة:</u> في الحالة التي يكون فيها تباين المجتمع σ^2 مجهولاً و من أجل العيِّنات ذات الحجم $n \geq 30$ يكون تباين العينة S^2 مقدراً جيداً لـ σ^2.

ومِنْ ثَمّ يمكن استبدال بـ σ ، S الانحراف المعياري للعينة . و هكذا يمكننا تعيين مجال ثقة تقريبي لمتوسط المجتمع μ بمستوى $(1-\alpha)$ من الثقة

$$\left[\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

و يكون الخطأ المطلق الأعظمي في تقدير μ و بثقة $(1-\alpha)$ هو

$$\left|\mp z_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right|$$

أما حجم العينة التي ينبغي سحبها بحيث لا يتجاوز الخطأ المرتكب في تقدير μ المقدار ε بثقة $(1-\alpha)$ ينتج من العلاقة $n \ge \left[\frac{z_{1-\alpha/2}.\ S}{\varepsilon}\right]^2$

حيث S هو الانحراف المعياري للعينة العشوائية المسحوبة من مجتمع الدراسة حجمها $n \ge 30$

مثال (4–5): في دراسة احصائية حول زمن تخثر الدم عند الأشخاص الذين يقطنون في إحدى المدن من البلدان الحارة ، تم دراسة عينة عشوائية من سكانها من الحجم 100 ، و وجد أن متوسط زمن تخثر الدم في العينة هو 12 ثانية و بانحراف معياري 2 ثانية . و المطلوب :

1. أوجد 95% مجال ثقة حول μ المتوسط الحقيقي لزمن تخثر الدم عند سكان المدينة المدروسة .

2. ما حجم العينة المناسب لتقدير μ بثقة 95% و بخطأ أعظمي لا يتجاوز 0.25 ثانية ؟

الحل :

a) إن $1-\alpha=0.95$ مجال ثقة لـ μ يكون من الشكل :

$$\left[\bar{x}-z_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\le \mu \le \bar{x}+\ z_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

(لأن $n=100\ \ge 30$ و الانحراف المعياري S هو مقدر لـ σ)

$$\left[\ 12-(\ 1.96\ ).\left(\frac{2}{10}\right)\le \mu \le 12+(\ 1.96\ ).\left(\frac{2}{10}\right)\right]$$

(حيث $1-\alpha/2=0.975 \leftarrow 1-\alpha\ =0.95$ و من جدول $Z\leftarrow z_{0.975}=$ 1.96)

و منه
$$[\ 12-0.392\le \mu \le\ 12+0.392\ \ ]$$

أي
$$[11.608\le \mu \le 12.392]$$

أي نكون واثقين 0.95% من أن متوسط زمن تخثر الدم عند سكان المدينة لن يقل عن 11.608 و لن يزيد على 12.392 ثانية.

2- إن حجم العينة المناسب لتقدير μ بثقة 0.95% و بخطأ لا يتجاوز 0.25 ثانية واحدة يتعين

$$n\ \ge\left[\frac{z_{1-\alpha/2}.\ S}{\varepsilon}\right]^2=\ \left[\frac{(1.96).(2)}{0.25}\right]^2=245.86$$

أي يجب أن يكون $n\ \ge\ \ 246$.

2.5.4) : مجال الثقة لمتوسط متغير عشوائي طبيعي تباينه مجهول:

لقد لاحظنا في الدراسة السابقة بأن معرفتنا لتباين المجتمع σ^2 ضروريّةٌ لتعيين مجال الثقة حول μ ، و في الحالة التي يكون فيها σ^2 مجهولاً فإننا لا نستطيع دوماً استبدال تباين المجتمع σ^2 تباين العينة s^2 ، و ذلك لأن الإحصاء $\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ يحوي متغيرين عشوائيين هما $\bar{x}$ ، S .

و عندما يكون حجم العينة $n \geq 30$ فإن تغيرات s^2 من عينة لأخرى تكون معدومة، لذلك يمكن استبدال لـ σ , S الانحراف المعياري للعينة . و هذا ما أشرنا إليه في الفقرة السابقة حيث اعتبرنا $\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim N\,(0,1)$ ، و لكن في الحالة التي يكون فيها $n \leq 30$ فإن تغيرات s^2 تغدو مؤثرة في شكل توزيع الاحصاء $\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ ، و يصبح توزيع هذا الإحصاء مختلفاً عن التوزيع الطبيعي المعياري ، و رأينا مسبقاً في بداية هذا الفصل أن للمتغير العشوائي

$\mathrm{T} = \frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ التوزيع t– ستيودنت بـ $\gamma = n - 1$ درجة من الحرية

ومِنْ ثَمّ من أجل بناء $(1-\alpha)$ مجال ثقة حول μ نأخذ العلاقة

$$\mathrm{P}\left[-t_{1-\alpha/2}(\gamma) \leq \mathrm{T} \leq t_{1-\alpha/2}(\gamma)\right] = 1-\alpha$$

و باستبدال T بما يساويه نجد :

$$P\left[-t_{1-\alpha/2}(\gamma) \leq \frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{1-\alpha/2}(\gamma)\right] = 1-\alpha \qquad \leftrightarrow$$

$$\mathrm{P}\left[\bar{x}-t_{1-\alpha/2}(\gamma)\frac{\mathrm{S}}{\sqrt{\mathrm{n}}} \leq \mu \leq \bar{x}+t_{1-\alpha/2}(\gamma)\frac{\mathrm{S}}{\sqrt{\mathrm{n}}}\right] = 1-\alpha$$

أي إن المجال $\left[\bar{x}- t_{1-\alpha/2}(\gamma)\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x}+ t_{1-\alpha/2}(\gamma)\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$ هو

$(1-\alpha)$ مجال ثقة للمتوسط μ .

و يكون $e = \left|\mp t_{1-\alpha/2}(\gamma)\frac{S}{\sqrt{n}}\right|$ ، $n \ge \left[\frac{t_{1-\alpha/2}(\gamma)\ .\ S}{\varepsilon}\right]^2$

كما رأينا في الفقرة السابقة .

مثال (4-6) :

تم قياس ارتفاع 15 نبتة من نوع معين بعد فترة زمنية من زرعها، فكان متوسط الارتفاع 83 c.m بانحراف معياري 5.8 c.m و المطلوب :

1. أوجد 0.95% مجال ثقة حول μ المتوسط الحقيقي لارتفاع النبته في مجتمع الدراسة بافتراض أن ارتفاع النبتة في المجتمع يخضع للتوزيع الطبيعي .

2. ما حجم العينة المناسب لتقدير μ بثقة 0.95% و بخطأ لا يتجاوز 2c.m؟

الحل :

1- إن 0.95% مجال ثقة حول μ حيث $n = 15 < 30$ يكون من الشكل

$$\bar{x}- t_{1-\alpha/2}(\gamma)\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x}+ t_{1-\alpha/2}(\gamma)\frac{S}{\sqrt{n}}$$

حيث:

$\bar{x} = 83$ ، $S = 58$ و $1-\alpha = 0.95 \leftarrow 1-\alpha/2 = 0.975$

كما أن $\gamma = n-1 = 15-1 = 14$ و منه من جدول t – ستيودنت نجد $t_{0.975}(14) = 2.145$

و منه :

$$\left[83 - (\,2.145)\frac{(5.8)}{\sqrt{15}} \le \mu \le 83 + (\,2.145)\frac{(5.8)}{\sqrt{15}} \right]$$

فيكون :

$$[\,79.788 \le \mu \le 86.212\,]$$

أي نكون واثقين 95% من أن متوسط ارتفاع النبتة في مجتمع الدراسة لن يقل عن 79.788 و لن يزيد على 86.212.

‎-2

$$n \ge \left[\frac{t_{1-\alpha/2}(\gamma)\,\cdot\, S}{\varepsilon} \right]^2 = \left[\frac{(2.145\,)(\,5.8)}{2} \right]^2 = 38.7$$

أي حجم العينة المناسب لتقدير μ بثقة 0.95% و بخطأ أعظمي لا يتجاوز 2c.m ينبغي أن يكون $n \ge 39$.

ملاحظة : كلما ازداد حجم العينة أصبح S تقديراً أفضل لـ σ ومِنْ ثَمّ اقتربت قيم t_α من قيم Z_α في التوزيع الطبيعي المعياري ، و هذا ما نلاحظه في جدول t – ستيودنت من خلال سطوره الأخيرة و مقارنة مع جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

3.5.4) : مجال الثقة للنسبة في المجتمع :

من المسائل المهمة التي كثيراً ما نصادفها تقدير نسبة العناصر من المجتمع المحققة لصفة معينة مثل نسبة المؤيدين لبرنامج اقتصادي معين ، نسبة نجاح حملة صحية معينة ، نسبة المصابين بمرض معين ، نسبة فعالية دواء معين لعلاج أحد الأمراض ، نسبة نجاح حملة تلقيح ضد مرض معين ....

فإذا كانت نسبة العناصر المحققة للصفة A في مجتمع مدروس هي P فإن احتمال أن نختار عنصراً يحقق هذه الصفة يساوي P ، ومِنْ ثَمّ يمكن أن نمثل

المجتمع المدروس بمتغير عشوائي X له توزيع برنولي بوسيط P هي النسبة في المجتمع ، و لقد رأينا أن $\hat{P} = \bar{X} = \frac{y}{n}$ هو مقدر للنسبة P .

علماً بأن $\bar{x}$ هو متوسط عينة حجمها n لمتغير عشوائي برنولي X وسيطه P،

و أن y يدل على عدد عناصر العينة المحققة للصفة A (عدد النجاحات) ،

و أن $\hat{p}$ هو مقدر غير منحاز لـ P و من أجل عينة كبيرة كبراً كافياً ($n \geq 30$) فإن $\hat{p}$ حسب مبرهنة النهاية المركزية له تقريباً توزيع طبيعي بمتوسط $\mu = P$ و تباين $\sigma^2 = \frac{pq}{n}$ (أي) $(\hat{p} \approx N (p , \frac{pq}{n})$)

ومِنْ ثَمّ

$$Z = \frac{\hat{p} - P}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \approx N(0,1)$$

و من أجل $(1 - \alpha)$ مجال ثقة حول P نأخذ

$$P \left[-z_{1-\alpha/2} \leq z \leq z_{1-\alpha/2} \right] = 1 - \alpha$$

نعوض فيه Z :

$$P \left[-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\hat{p} - P}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \leq z_{1-\alpha/2} \right] = 1 - \alpha$$

و منه نجد : $(1 - \alpha)$ مجال ثقة حول P من الشكل :

$$\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{pq}{n}} \leq P \leq \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

لكن طرفي المجال السابق ينبعان الوسيط P و باعتبار أن تغيرات $\sqrt{\frac{pq}{n}}$ تكون بطيئة جداً ، فيمكن أن نستبدل بـ p ، q ، $\hat{p}$ ، $\hat{q}$ حيث أن $\hat{q} = 1 - \hat{p}$

و هكذا فإن $(1-\alpha)$ مجال ثقة حول p هو تقريباً المجال

$$\left[\hat{p}-z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}.\hat{q}}{n}},\ \hat{p}+z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}.\hat{q}}{n}}\right]$$

و منه يلحظ أن الخطأ المطلق الأعظمي المرتكب في تقدير p وبثقة $(1-\alpha)$ يساوي $\left|\mp z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}.\hat{q}}{n}}\right|$ و أن حجم العينة الواجب أخذها لنقدر p بثقة $(1-\alpha)$ و بخطأ لا يتجاوز ε هو $n \geq \frac{{z_{1-\alpha/2}}^2.\hat{p}.\hat{q}}{e^2}$.

مثال (4-7): لدى تخدير 100 شخص من المرضى الكبار بالسن تبين أن 36 منهم حصلت لهم مضاعفات جراء تخديرهم . و المطلوب :

1. أوجد 99% مجال ثقة لنسبة الذين يعانون من مضاعفات جراء التخدير من بين المرضى الكبار بالسن .

2. عين الخطأ المطلق المرتكب عندما نفترض أن $\hat{p} = p$ بثقة 99%

3. ما حجم العينة التي ينبغي دراستها لتقدير p بثقة 99% و بخطأ لا يتجاوز 0.04؟

الحل :

1. لدينا $n = 100$ و $y = 36$ و منه

و من أجل $\hat{p} = \frac{y}{n} = \frac{36}{100} = 0.36$

و يكون $1-\alpha = 0.99 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0.995$

$z_{0.995} = 2.58$ و منه 99% مجال ثقة حول p نسبة الذين يعانون مضاعفات جراء التخدير من بين المرضى الكبار في السن

$$\hat{p} - z_{0.995}\sqrt{\frac{\hat{p}.\hat{q}}{n}} \leq P \leq \hat{p} + z_{0.995}\sqrt{\frac{\hat{p}.\hat{q}}{n}}$$

$$(0.36) - (2.58)\sqrt{\frac{(0.36).(0.64)}{100}} \leq P \leq (0.36) + (2.58)\sqrt{\frac{(0.36).(0.64)}{100}}$$

$$0.36 - 0.124 \leq P \leq 0.36 + 0.124$$

$$0.236 \leq P \leq 0.484$$

و منه نكون واثقين 99% من أن هذه النسبة P لن تقل عن 0.236 و لن تزيد على 0.484

.2

$$\varepsilon = \left| \mp z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\ .\ \hat{q}}{n}} \right| = 0.124$$

.3

$$n \geq \frac{z^2_{1-\alpha/2}.\hat{p}\ .\hat{q}}{\varepsilon^2} = \frac{(2.58)^2.(0.36).(0.64)}{(0.04)^2} = 958.52$$

أي حجم العينة يجب أن يكون $n \geq 959$

مثال (4-8) : ادعى باحث أن 10% من الأشخاص عسراويون ، و لاختبار هذا الادعاء ، تم اختيار 400 شخص ، و وجد 48 منهم عسراويين . فهل يمكننا قبول هذا الادعاء بمستوى 99% من الثقة .

الحل : لنشكل 99% مجال ثقة لـ p نسبة الأشخاص العسراويين و بملاحظة أن لدينا $n = 400$ و $x = 48$ و منه $\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{48}{400} = 0.12$ ، ومن أجل $1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.995$

و يكون: $z_{0.995} = 2.58$ (و هذا ينتج من جدول التوزيع الطبيعي المعياري)، ومِنْ ثَمّ فمجال ثقة المطلوب :

$$\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}.\hat{q}}{n}} \le P \le \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}.\hat{q}}{n}} \Leftrightarrow$$

$$(0.12) - (2.58)\sqrt{\frac{(0.12).(0.88)}{400}} \le P \le (0.12) + (2.58)\sqrt{\frac{(0.12).(0.88)}{400}}$$

$$0.12 - 0.042 \le P \le 0.12 + 0.042 \Leftrightarrow 0.078 \le P \le 0.162$$

و بما أن النسبة المدعاة 10% تقع ضمن مجال الثقة ، ومِنْ ثَمّ يمكن قبول ادعاء الباحث عند مستوى 99% من الثقة .

4.5.4): مجال الثقة لتباين متغير عشوائي طبيعي وسيطاه مجهولان:

إذا كان $\bar{x}$ و S^2 هما متوسط و تباين عينة حجمها n لمتغير عشوائي له التوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ حيث رأينا أن المتغير العشوائي $\varkappa^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ له التوزيع كاي– مربع بـ $\gamma = n - 1$ درجة من الحرية .

و بتبديل بـ $\varkappa^2$ بما يساويها في العلاقة الاحتمالية الصحيحة الآتية :

$$\mathrm{p}\left[\varkappa^2{}_{\alpha/2}(n-1) \le \varkappa^2 \le \varkappa^2{}_{1-\alpha/2}(n-1)\right] = 1 - \alpha$$

أي :

$$\mathrm{p}\left[\varkappa^2{}_{\alpha/2}(n-1) \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \varkappa^2{}_{1-\alpha/2}(n-1)\right] = 1 - \alpha$$

و بإصلاح هذه العلاقة نجد أن :

$$p\left[\frac{(n-1)S^2}{\varkappa^2{}_{1-\alpha/2}(n-1)} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\varkappa^2{}_{\alpha/2}(n-1)}\right] = 1-\alpha$$

و منه نكون قد عينا $(1-\alpha)$ مجال ثقة حول تباين متغير عشوائي طبيعي σ^2 من الشكل : $\left[\frac{(n-1)S^2}{\varkappa^2{}_{1-\alpha/2}(n-1)} \quad , \quad \frac{(n-1)S^2}{\varkappa^2{}_{\alpha/2}(n-1)}\right]$

مثال (9-4) : أخذت عينة من 20 شخصاً و قيست أوزانهم ، فوجد أن انحرافها المعياري 9 K.G ، فإذا كان للأوزان التوزيع الطبيعي فأوجد 95% مجال ثقة لتباين الأوزان في المجتمع .

الحل : لدينا $1-\alpha = 0.95$ منه $\alpha/_2 = 0.025$ و يكون

$1-\alpha/_2 = 0.975$ و من جدول توزيع كاي – تربيع نجد :

$$\varkappa^2{}_{\alpha/2}(\gamma = n-1) = \varkappa^2{}_{0.025}(19) = 8.907$$

$$\varkappa^2{}_{1-\alpha/2}(\gamma = n-1) = \varkappa^2{}_{0.975}(19) = 38.582$$

إذا $1-\alpha = 0.95$ مجال ثقة حول σ^2 (تباين الأوزان في المجتمع المدروس)

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\varkappa^2{}_{1-\alpha/2}(n-1)} \quad , \quad \frac{(n-1)S^2}{\varkappa^2{}_{\alpha/2}(n-1)}\right] = \left[\frac{(19)(81)}{38.582} \ , \ \frac{(19)(81)}{8.907}\right]$$

$$= [\,39.89\,, 172.785\,]$$

و يكون 95% مجال ثقة حول الانحراف المعياري σ لأوزان الأشخاص في المجتمع المدروس من الشكل :

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\varkappa^2{}_{1-\alpha/2}(n-1)}} \quad , \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\varkappa^2{}_{\alpha/2}(n-1)}}\right] = [\sqrt{39.89}\,, \sqrt{172.785}]$$

$$= [\,6.32\,, 13.15\,]$$